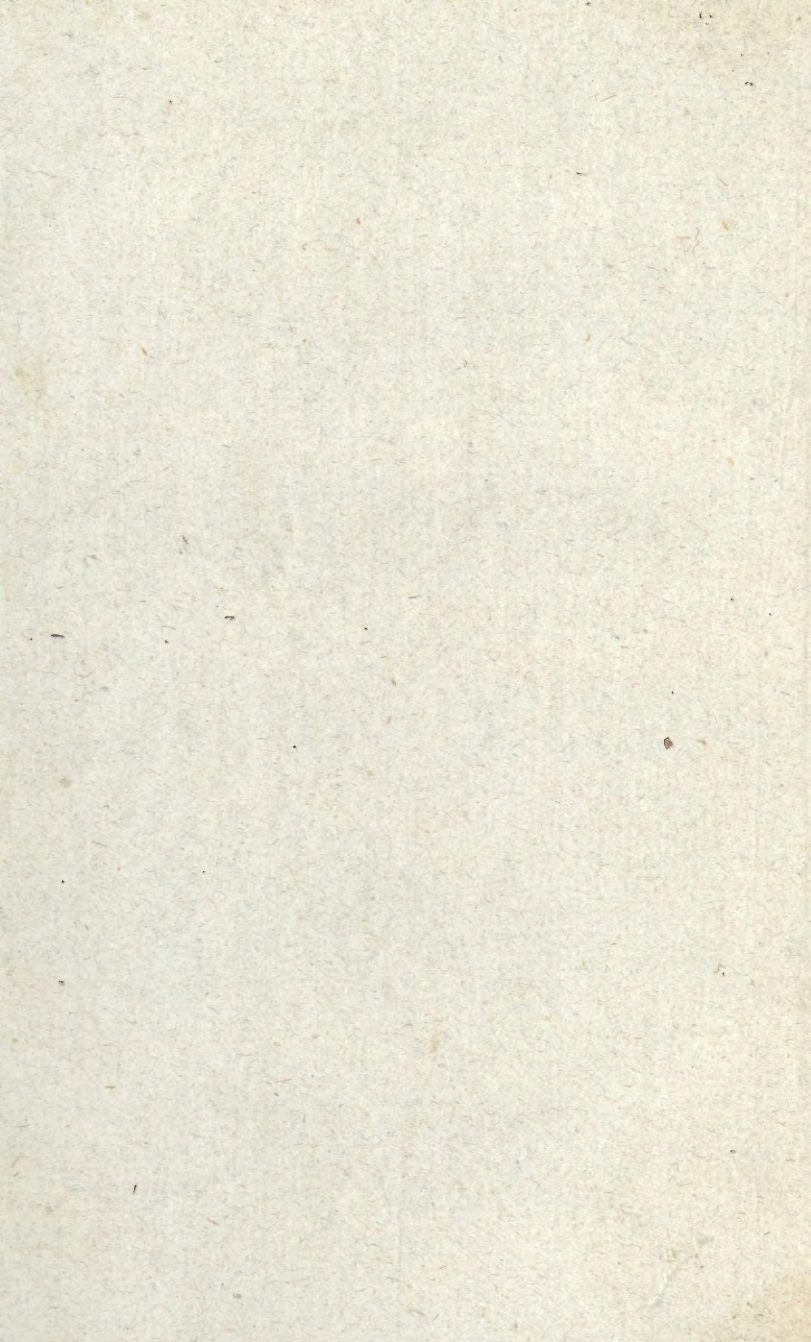




ЗАЛА 18
ШКАФЪ 65
ПОЛКА 5
№ 37

2642

41-5





сокращеніе

ВЫШНЕЙ МАТЕМАТИКИ

СОЧИНЕННОЕ

Петромъ Гиларовскимъ, учителемъ
Математики и Физики въ учительской Гим-
назіи, Физики въ обществѣ благородныхъ дѣ-
вицъ, Россійскаго слога и Латинскаго языка
въ благородномъ Пажескомъ Корпусѣ.



Печатано въ типографіи Вильковского.

Въ Санктпетербургѣ 1796 года.

COPIES OF THE

LIBRARY OF THE

CONGRESS

OF THE UNITED STATES
OF AMERICA
WASHINGTON
1854

LIBRARY OF THE

CONGRESS

OF THE UNITED STATES

Содержаніе и порядокъ разположенія.

- А) *Сокращеніе вышней Алгебры т. е. Дифференціального и Интегрального счисленія.*
- В) *Высшая Геометрія, или ученіе о кривыхъ линияхъ.* Она раздѣляется на двѣ части, изъ коихъ.
- І) Содержитъ сѣченія Коническія, а именно: съ § 3 — до 12 свойства всѣхъ сѣченій коническихъ; съ 12 — 16 фокусы всѣхъ сѣчен. кон.; съ 16 — 24 радіусы движенія (radii vectores); съ 24 — 32 субтангенсы и субнормальныя; съ 32 — 35 опускаемые изъ фокусовъ на тангенсы перпендикуляры; съ 35 — 41 асимптошы; съ 41 — 50 діаметры; съ 50 — 54 радіусы кривизны (radii curvaturae, radii osculi); съ 54 — 60 площади криволинейныхъ пространствъ; съ 60 — 66 толстошы тѣлъ и проч. съ 66 — 69 наружная поверхность ихъ; съ 69 — 72 спрямленіе кривыхъ линей, съ 71 до конца сей части превратный способъ тан-

шангенсовъ И такъ сѣя часть содержитъ
XIII практисовъ.

- 2) Содержитъ въ себѣ ученіе о другихъ
кривыхъ линияхъ какъ Алгебраическихъ
такъ и Трансцендентныхъ, а именно о
Конхондѣ, Циссондѣ, Логарифмическѣ,
Спиральной, Циклондѣ и Квадрат-
риксѣ съ показаніемъ употребленія
особливо Логарифмики и Циклоиды.

На конецъ приложено понятіе о диффе-
ренціалахъ второй степени и ихъ упо-
требленіе.

Поскольку сѣе сочиненіе служитъ дополне-
ніемъ къ физикѣ Гиларовскаго; то приложены
нѣкоторыя поправки въ разсужденія фигуръ
Физики.

НАЧАЛЬНЫЯ ОСНОВАНІЯ

Высшей Алгебры

§ 1

Каждое количество можетъ увеличиваться и уменьшаться двоякимъ образомъ: 1] получая вдругъ все приращеніе или умаленіе 2] переходя въ возможныя степени.

§ 2.

Какъ бы увеличеніе и уменьшеніе ни было мало, степеней всегда бываетъ безконечное множество, на пр. между дробями $\frac{1}{7}$ и $\frac{2}{7}$ безконечное есть множество среднихъ дробей. Между дугою АН и АД фиг. II. какъ бы Н къ D близка ни была безмѣрное множество есть степеней, кои должна пройти АН, дабы сравняться съ АД; такъ же между перпендикуларомъ НР и DL среднихъ находится безчисленное множество. Приращеніе или умаленіе столь малое, что изобразить его никакою дробью нѣтъ способа, назвалъ Лейбницъ *разностью* (differentia); а вычисленіе такихъ разностей, *дифференціальнымъ* вычисленіемъ (Calculus differentialis).

§ 3.

Хотя такія малыя разности сами по себѣ ничего не значащѣ; но содержаніями своими показываютъ свойства увеличивающихся или уменьшающихся количествъ. Почему вычисленіе сіе весьма важно, какъ то въ послѣдствіи сіе самымъ дѣломъ оправдися.

§ 4.

Само по себѣ видно, что шѣ только количества принимающѣ такія разности, кои переменны; а постоянныя со всѣмъ ихъ не имѣютъ. Переменные означаются послѣдними буквами алфавита, а постоянныя первыми. Безмѣрно малая разность какого нибудь переменнаго количества означается буквою d такъ, что dx есть такая разность отъ количества x . По сему остерегаться должно, чтобъ постоянныхъ величинъ не означать никогда буквою d , дабы не было сумнѣнія въ разсужденіи того, что d означаетъ.

§ 5.

Состояніе, въ которомъ находится какое нибудь переменное количество, называется его *функциею*. на пр. $x+a$, $x-a$, ax , x^m суть разныя функціи количества x .

§ 6.

§ 6.

Взять дифференціалъ отъ какой нибудь функціи количества переменнаго есть нечто иное, какъ представить переменну, которая въ ней произойти должна отъ того, что самое переменное количество принимаетъ приращеніе или умаленіе.

§ 7.

Дифференціалъ функціи $b+x$ есть dx . Ибо поставивши въ ней вмѣсто x , $x+dx$, получимъ функцію: $b+x+dx$ Слѣдовательно разность отъ прежней будетъ dx Такъ же $d(b-x) = -dx$. Ибо еслили вмѣсто x поставимъ $x+dx$, выйдетъ функція: $b-x-dx$. Слѣдственно разность отъ прежней будетъ $-dx$. По сему $d(x+y) = dx+dy$. Ибо положивъ вмѣсто x , $x+dx$, а вмѣсто y , $y+dy$, понять легко, что функція $x+y$ сдѣлается такою: $x+y+dx+dy$. Слѣдственно разность отъ прежней будетъ $dx+dy$. Точно такъ же $d(x-y) = dx-dy$. При семъ замѣнить должно, что ежели вмѣсто x поставляемъ $x+dx$, то хотя выходящая чрезъ сіе функція и не всегда дѣлается нѣсколько большею прежней; однако всегда должно вычитатьъ изъ нее прежнюю, чшобъ соблюсти единообразіе: на противъ того, ежели вмѣсто x

А 2

поспа-

поставлять $x-dx$, то новую функцію должно вычитать изъ прежней. Ибо въ Алгебрѣ и отрицательныя разности имѣютъ мѣсто.

§ 8.

Дифференціалъ произведенія $xу$ сыщется, когда вмѣсто x поставивъ $x+dx$, а вмѣсто y , $y+dy$, обѣ сїи величины умножимъ и изъ оной функціи прежнюю вычтемъ. Тогда выйдетъ функція: $xу+xdy+ydx+dx dy$; а разность опѣ прежней выйдетъ $xdy+ydx+dx dy$. Но какъ произведеніе двухъ безконечно малыхъ величинъ dx , dy есть такая часть опѣ dx сколь великъ dy , или есть безконечно малая дробь опѣ dx , какъ то извѣстно изъ ученія о дробяхъ; то членъ функціи $dx dy$ и оставляется такъ, какъ безконечная малость въ разсужденіи другихъ членовъ. По сему $dxу = xdy+ydx$. Отсюда видно, что 1) ежели вмѣсто x поставится a ; то $daу$ будетъ $=ady$. Ибо членъ $уда = 0$ за тѣмъ, что a есть постоянное количество (§ 4). 2) Ежели вмѣсто x поставимъ z ; то прежде по правилу сего параграфа $dzx = xdz + zdx$, по томъ поставивши вмѣсто x zx , а вмѣсто dx dzx , и умноживши dzx на y , получимъ $dzxy = zxdy + zydx + yxdz$. Такимъ образомъ опѣ произведенія 4 5, и большаго числа переменныхъ количествъ Дифференціалъ сыскать можно. 3) Ежели вмѣсто y поставится x такъ, что $xу$ переменится въ x^2 ; то $dxх =$
 xdx

$x dx + x dx = 2x dx$. По сему поставивъ вмѣсто y , x^2 , будетъ $dx x^2 = x^2 dx + x dx^2$. Но $dx^2 = 2x dx$. Слѣдовательно $dx x^2 = x^2 dx + 2x^2 dx = 3x^2 dx$. Такъ же $dx^4 = x^3 dx$, $dx^5 = 5x^4 dx$ и вообще дифференціалъ всякой степени отъ x равенъ дифференціалу x умноженному на показателя степени и на самую степень съ уменьшеніемъ показателя единицею такъ, что $dx^n = nx^{n-1} dx$. 4) когда показатель n есть дробь, или когда степень отъ x есть въ самомъ дѣлѣ корень какой нибудь степени отъ x ; тогда стоитъ только превратить въ коренной знакъ, чтобъ получить дифференціалъ отъ корня. Такъ

$$dx^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2} x} \cdot dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}} dx}{2} = \frac{dx}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}; \text{ такъ же}$$

$$dx^{\frac{1}{3}} = d\sqrt[3]{x} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{1}{3} x} dx = \frac{dx}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}, \text{ и вообще}$$

$$d\sqrt[n]{x^m} = dx^{\frac{m}{n}} = \frac{\frac{m}{n} - 1}{\frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}}} dx = \frac{m dx}{n\sqrt[n]{x^{m-n}}}$$

кихъ корней удобно брать дифференціалы, и не превращая съ начала коренные знаки въ показатели, а послѣ показателей опять въ коренные знаки. 5) ежели вмѣсто y поставить z^{-1} то $dx y = dx z^{-1} = z^{-1} dx + x dz^{-1}$; но $dz^{-1} = -z^{-2} dz = -\frac{dz}{z^2}$.

Слѣдовательно $dx \cdot z^{-1} = d \frac{x}{z} = \frac{dx}{z} - \frac{xdz}{z^2} = \frac{zdx - xdz}{z^2}$.

По сему дифференціалъ каждой дроби равенъ разности произведенія знаменателя на дифференціалъ числителя и произведенія числителя на дифференціалъ знаменателя, разделенной на квадратъ знаменателя.

§ 9.

Представивши себѣ все сіе обстоятельно, не трудно уже брать дифференціалы

отъ сложныхъ функцій. Такъ на пр. а $\frac{x^2}{y}$

т. е. дифференціалъ функціи содержащей степень и дробь по 3 и 5 пунктамъ § 8 равенъ

$\frac{ydx^2 - x^2dy}{y^2}$; а какъ $dx^2 = 2xdx$ по 3 пункту: то

$d \frac{x^2}{y} = \frac{2xydx - x^2dy}{y^2}$ Такъ же $d \frac{xz}{Vy}$ по 5 пункту

равенъ $\frac{Vy \cdot dxz - xzdVy}{y}$; но dxz по 1 пункту =

$x dz + z dx$, а dVy по 4 пункту = $\frac{dy}{Vy}$. Слѣдовательно

но

$$\text{но } d \frac{xz}{V_y} = x V_y dz + z V_y dx - \frac{xz dy}{2 V_y} = \frac{2xydz + 2zydx - xzdy}{2yV_y = 2V_y^3}$$

у

Вообще дабы взять дифференціалъ отъ сложной функціи, должно съ начала всѣ ея часипи принявъ за простыя количества и означить дифференціалы ихъ буквою d, а по томъ вмѣсто d поспавлять по пунктамъ § 7 и 8. надлежащіе дифференціалы, въ чемъ всѣ затрудненія и самая малая привычка удобно изтребить можетъ. По сему весьма полезно дѣлать самому себѣ задачи для взятія дифференціаловъ отъ функцій, которыя бы сколько можно были сложнѣе на пр.

$$d(x.^m y.^n z.^r + \frac{V_u}{t}) \text{ съ начала есть } d(x.^m y.^n z.^r) + \frac{dV_u}{dt}$$

$$\text{по § 7; по томъ } d(x.^m y.^n z.^r) = x.^m y.^n dz + y.^n z.^r dx + z.^r x.^m dy$$

$$dx + z.^r x.^m dy + x.^m y.^n dz \text{ по 1 пункту § 8, а } dz =$$

$$\frac{r-1}{rz} dz, dx = \frac{m-1}{mx} dx, dy = \frac{n-1}{ny} dy; \text{ слѣдо-}$$

$$\text{вапсельно } d(x.^m y.^n z.^r) = \frac{r-1}{rz} x.^m y.^n dz + \frac{m-1}{mx} y.^n z.^r dx + \frac{n-1}{ny} x.^m z.^r dy +$$

А 4

n—I r m

н у z. x dy. Къ сему дифференціалу должно
придать $d\frac{V_u}{t}$, который по 4 и 5 пункту § 8=

$$\frac{tdV_u - V_udt}{t^2} = \frac{tdu - 2udt}{2V_u \cdot t^2} = \frac{tdu - 2udt}{2t^2 V_u}$$

§ 10.

Дифференціалы тригонометрическихъ ли-
ней сыскиваются слѣдующимъ образомъ: диф-
ференціалъ синуса дуги x удобно найдемся,
если вмѣсто x, какъ прежде, положимъ
x+dx. Тогда будетъ по правиламъ тригоно-
метріи $\sin(x+dx) = \sin x \cdot \cos dx + \cos x \cdot \sin dx$; но $\cos dx$
или косинусъ безконечно малой дуги безконечно
мало разнится отъ радіуса и слѣдовательно
можетъ быть безъ чувствительной погрѣшно-
сти принять за радіусъ; а $\sin dx$ безконечно
мало разнится отъ самой дуги dx такъ, что
она вмѣсто его поставлена быть можетъ.
По сему назвавши радіусъ единицею, какъ
онъ въ оной формулѣ и приемлется, получимъ
 $\sin(x+dx) = \sin x + d \cos x$. Слѣдовательно раз-
ность $\sin(x+d)$ и $\sin x$ будетъ равна
 $d \cos x$, или $d \sin = d \cos x$. Такъ же $d \cos x$ сыщется
по формулѣ $\cos(x+dx) = \cos x \cos dx - \sin x \sin dx$.
равенъ

равенъ— $dx \sin x$. Ибо хотя косинусъ $\sin x$ становится меньше, чѣмъ дуга больше, однако изъ $\cos(x+dx)$ надлежитъ вычислить $\cos x$. Отсюда удобно сыскать дифференціалы Тангенса, Котангенса, Секанса и Косеканса зная,

$$\text{что } \operatorname{tg} = \frac{\sin}{\cos}, \operatorname{cot} = \frac{\cos}{\sin}, \operatorname{sec} = \frac{1}{\cos}, \text{ а } \operatorname{cosec} = \frac{1}{\sin}.$$

§ II.

Слѣдовало бы здѣсь показать, какъ дифференціалъ логариѳма находится т. е. чему равенъ $\operatorname{dlog} x$; но какъ сіе гораздо удобнѣе сдѣлать посредствомъ линей логариѳмической; то о семъ и будетъ предложено ниже см. §. 93 о кривыхъ линейяхъ.

§ 12.

Имѣя о дифференціалахъ понятіе въ сихъ параграфахъ предложенное, можно уже употребить ихъ себѣ въ пользу слѣдующимъ образомъ: многія количества переменныя и многія ихъ функціи могутъ увеличиваться и уменьшаться до извѣстнаго только предѣла. Си по самыя высшія и самыя низайшія степени находятъ во многихъ случаяхъ весьма нужно и посредствомъ дифференціальнаго вычисленія весьма удобно. Ибо когда переменное количество дойдетъ до самой высшей

шей или до самой нижней степени такъ, что уже болѣе увеличиваться или уменьшаться не можетъ; тогда оно сдѣлается постояннымъ; слѣдственно тогда дифференціалъ его равенъ будетъ нулю по § 3. И такъ споймъ только дифференціалъ количества переменнаго или его функціи положить равнымъ нулю, дабы найти самую высшую, или самую нижайшую степень, или опредѣлить, чему переменное количество тогда равно бываетъ. Но какъ положивши дифференціалъ равнымъ нулю, опредѣляется либо самая высшая, либо самая нижняя степень; то еще нужно узнавать, которая изъ нихъ имѣетъ мѣсто. Сіе сдѣлать удобно, полагая прежде вмѣсто x опредѣленное знаменованіе количества x , а потомъ оное же $+dx$ и $-dx$. Ежели въ обоихъ случаяхъ функція сдѣлается меньше, нежели ошъ сысканной величины x , то степень есть самая высшая; ежели же будетъ функція больше, поставляя вмѣсто x , $x+dx$, и $x-dx$; то сія степень есть самая меньшая. Ибо когда $+dx$ и $-dx$ дѣлаютъ функцію большею оной степени, очевидно она есть самая меньшая, когда же $+dx$ и $-dx$ дѣлаютъ ее меньшею, то она есть самая большая. Все сіе удобнѣе будетъ понять изъ слѣдующихъ примѣровъ: 1) Линія a можетъ бесконечно многократно раздѣлена быть на двѣ части; пре-

пребудется найти такія части, чтобъ произведеніе ихъ было самое большее.

Положимъ одну часть $= x$, другая будетъ $a - x$, а произведеніе будетъ $= ax - xx$, дифференціалъ его $adx - 2xdx$ положивши равнымъ нулю т. е. $a - 2x = 0$, получимъ $a = 2x$ и $x = \frac{a}{2}$; По сему и другая часть будетъ $= \frac{a}{2}$

и функція она будетъ $= \frac{a^2}{4}$. И такъ выйдетъ, что самое большее, или самое меньшее произведеніе частей линей бываетъ тогда, когда она раздѣляется по поламъ. Остается узнать, которая степень имѣетъ мѣсто. Положивъ въ функціи $ax - xx$, вмѣсто x не

просто найденную величину $\frac{a}{2}$, но $\frac{a}{2} + dx$

выйдетъ функція: $\frac{a^2}{2} + adx - \frac{a^2}{4} - adx - (dx)^2 =$

$\frac{a^2}{4} - (dx)^2 < \frac{a^2}{4}$. Такъ же положивъ вмѣсто

x , $\frac{a}{2} - dx$, получимъ функцію: $\frac{a^2}{2} - adx - \frac{a^2}{4} + adx -$

$$adx - (dx^2) = \frac{a^2}{4} - (dx)^2 < \frac{a^2}{4} \text{ Слѣдовательно сп}$$

пень функціи, когда $x = \frac{a}{2}$, есть самая вы

шая. б) Найти, когда произведеніе квадрата одной части линей a на другую бываетъ самое большее? положивъ одну часть $= x$ получимъ оное произведеніе $= ax^2 - x^3$, а ежели дифференціалъ его $2axdx - 3x^2dx$ положимъ $= 0$

выйдетъ $x = \frac{2a}{3}$ т. е. что тогда сіе про

изведеніе есть самое большее, когда одна часть $= \frac{2}{3}$, а другая $= \frac{1}{3}$, какъ то можн въ семъ увѣриться и показаннымъ признакомъ и поставляя вмѣсто a разныя числа.

с) Найти, когда перпендикуляръ изъ окружности на діаметръ опущенный, бываетъ самый большій? положивъ одинъ отръзокъ діаметра $= x$, а другой $a - x$, ежели діаметръ $= a$, выйдетъ произведеніе изъ $ax - xx =$ квадрату онаго перпендикулара. И такъ ежели положимъ $adx - 2xdx = 0$, получимъ $a = 2x$

$2x$ и $x = \frac{a}{2}$ т. е. тогда перпендикуляръ бы

ваетъ самый большій, когда онъ возставленъ на діаметръ въ разстояніи отъ окружности равномъ

равномъ радиусу, или изъ центра. д) По данной пропорціи параллелепипеда m^3 и одному его пропѣженію на пр. высотѣ b , найти другія пропѣженія m и x долготу и широту, при которыхъ поверхность его была бы самая меньшая? Положивъ одно изъ пропѣженій искомымъ $= x$,

другое будетъ $= \frac{m^3}{bx}$, следовательно поверхность

будетъ $= \frac{2m^3}{b} + \frac{2m^3}{x} + 2bx$, а дифференціалъ ея $=$

$2bdx - \frac{2m^3 dx}{x^2}$. И такъ положивъ оный рав-

нымъ нулю получимъ $bx^2 = m^3$ и $x = \sqrt{\frac{m^3}{b}}$. По

сему $\frac{m^3}{bx} = \sqrt{\frac{m^3}{b}}$ и вся поверхность $= 4\sqrt{m^3 b} +$

$\frac{2m^3}{b}$, которая и есть самая меньшая, какъ

по легко узнать по предложенному выше признаку и по примѣрамъ въ числахъ на пр. положивъ $m^3 = 320^I$ а $b = 5^I$, выйдетъ $x = 8$ и

$\sqrt{\frac{m^3}{b}} = 8$ такъ, что вся поверхность будетъ $= 80 + 80 + 128 = 288$; если же вмѣсто x положимъ

положиться на пр. 16, а вмѣсто $V_b^{\frac{m^3}{b}} = 4$; чрезъ

что толстота параллелепипеда не перемѣнилась, то поверхность будетъ $= 160 + 40 + 128 = 328$ такъ, что въ первомъ случаѣ въ разсужденіи матеріала будетъ выгоды на 40 квадратныхъ футовъ. с) Дана величина двухъ совершенно упругихъ шаровъ a и b , требуется найти, сколь великъ долженъ быть посредствующій между ними шаръ m , который бы скоростію сообщенною ему отъ шара a произвелъ самое большее дѣйствіе на покоящійся шаръ b : изъ Механики извѣстно см. 462 стр. физики Гиларовскаго что ежели скорость ударающаго шѣла $A = c$, удараемаго $B = d$; то послѣ удара скорости удараемаго будутъ $\frac{Ad + 2Ac - Bd}{A+B}$, или $\frac{2Ac}{A+B}$, ко

гда B покоится или $d = 0$. И такъ скорость, которую получитъ покоящійся шаръ m отъ

$a = \frac{2ac}{a+m}$, называя скорость, шара a буквою c

Теперь сію скорость должно умножить опять на удвоенной составъ шара m и раздѣлить на сумму $m+b$, чтобъ получить скорость, которая отъ m сообщится шару b . И такъ

скорость

скорость $v = y = \frac{4acm}{(a+m)(m+b)}$. Взявши дифференціалъ сего количества, гдѣ m только перемененъ и положивъ сего $= 0$, рѣшимъ задачу

$$d \frac{4acm}{am+mm+ab+bm} = \frac{4acdm \cdot (am+mm+ab+bm) - (4acm)(adm+2mdm+bdm)}{(am+mm+ab+bm)^2} = 0$$

И такъ $am+mm+ab+bm = am+2m^2+bm$, или $m^2 = ab$. т. е. m есть средній пропорціональный между a , b . Слѣдовательно въ такомъ ряду упругихъ шаровъ, гдѣ каждый между двумя другими находящійся есть между ими средній пропорціональный, самый послѣдній получитъ самую большую, изъ всѣхъ возможныхъ, скорость.

§ 13.

Употребленіе дифференціального вычисленія въ сыскиваніи нѣкоторыхъ прямыхъ линий въ вышней Геометріи весьма употребительныхъ и нужныхъ показано будетъ ниже. А многоразличное сего употребленіе въ механикѣ и физикѣ приложено на концѣ физики Гиларовскаго.

§ 14.

По данному дифференціалу найти ту самую

ую Функцию, отъ коей онъ взятъ, называется взятъ *интегралъ*. Онъ означается обыкновенно буквою S. Такъ на пр инте

гралъ отъ dx есть x или $sdx = x$, $s \frac{(ydx - xdy)}{y^2} = -\frac{x}{y}$

какъ то удобно можно сіе понять, зная вышесказанное. По чему стоимъ только поминуть правила брать дифференціалы, дабы вдругъ находить интегралы, однако жъ для удобнѣйшаго разумѣнія сего предложенія кратко представляю интегралы отъ разныхъ функций 1) $f(dx \pm dy) = x \pm y$ 2) $f(ydx + xdy) =$

xy 3) $s \left(\frac{ydx - xdy}{y^2} \right) = -\frac{x}{y}$. По сему $s \left(\frac{-ady}{y^2} \right) = \frac{a}{y}$ 4)

$f(mx^m - I dx) = \frac{x^{m+1}}{m+1}$. т. е. дабы взять интегралъ отъ дифференціала степени x , должно съ начала къ показателю степени приписать 1 и на сію сумму умноженную на dx раздѣлить предложенный дифференціалъ. Такі

$s \frac{2x^3 dx}{3} = \frac{x^4}{4}$ и $s 2x^{-2} dx = -2x^{-1} = -\frac{2}{x}$ и пр.

Еслили количество возвышенное до какой нибудь степени состоятъ изъ двухъ или многихъ членовъ; то дабы удобнѣе было взять его интегралъ, должно все члены сравнить съ какимъ нибудь однимъ переменнымъ количествомъ и вмѣсто ихъ дифференціала взять

дифферен

дифференціала взять дифференціалъ сего; на пр. $s. m (a+by)^{m-1} bdy$ удобнѣе същется, положивъ $a+by = x$. По сему $bdy = dx$ такъ, что $s. m (a+by)^{m-1} bdy = s. m x^{m-1} dx = x^m = (a+by)^m$.

5. Интегралы отъ дифференціаловъ корней легче брать приводя ихъ въ степени, или вводя вмѣсто корней показателей. Такъ

$s \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \int \frac{dx}{2} x^{-\frac{1}{2}}$, приложивъ къ показателю 1 и раздѣливъ на сѣю сумму и на dx выйдетъ

$$s \frac{dx}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} \cdot x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}. \text{ Въ прочемъ замѣ-}$$

нить нужно, что $s \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x}$. Такъ же $s \frac{dx}{2\sqrt{x^2}} =$

$$\frac{3}{\sqrt{x}} \text{ и вообще } \int \frac{dx}{m \cdot m-1} = \frac{x^m}{m\sqrt{x}}. \text{ А чтобъ сыс-}$$

кивать интегралы отъ такихъ дифференціаловъ, въ коихъ подъ корнемъ стоятъ многіе члены, должно ихъ всѣ полагать равными одному переменному количеству на пр.

$$s \frac{adx + 2x dx}{2\sqrt{(ax+x^2)}}, \text{ положивъ } ax+x^2=y \text{ и } adx + 2xdx=dy,$$

Б

будетъ

будетъ $= s \cdot \frac{dy}{\sqrt{y}} = Vy$. Отсюда видно, что

онъ равенъ $V(a^2 + x^2)$. 6) удобно себѣ предста-
вить зная сказанное въ § 10 что $S.d. \cos x =$
 $\sin x$, что $s.-d. \sin x = \cos x$, и что поелику $d =$

$\frac{d \cos x}{-\sin x}$; то когда $\cos x$ назовется ω , $s \cdot \frac{d \cos x}{-\sin x} = s \cdot \frac{d \omega}{V(1 - \omega^2)}$
 $=$ дугѣ x , коей косинусъ есть ω .

§ 15.

Въ разсужденіи интеграловъ замѣтить
должно слѣдующія двѣ вещи: 1) поелику
 $d(x \pm a) = dx$ точно такъ же, какъ и диффе-
ренціалъ отъ x ; то по данному дифференціалу
 d или подобному ему не можно узнать постоян-
ныхъ количествъ, кои съ переменными сово-
куплены были; а должно до сего доходитьъ
черезъ разсужденіе о самой задачѣ, полагая
переменное количество равнымъ 0 и смотрѣть
дѣлается ли чрезъ то интегралъ $= 0$, когда
очевидно по существу задачи должно ему
сдѣлаться $= 0$ какъ то въ § 67 показано.
По сему иногда бываетъ нужно по взятой
интеграла прибавить къ нему или вычитать
какое нибудь постоянное количество, одна-
кожъ, ежели просто пребудется взять отъ
предложенныхъ въ § 14. дифференціаловъ
инте-

интегралы безъ всякихъ задачъ и условій, по они сыскиваются такъ, какъ, тамъ показано. 2) отъ каждаго переменнаго количества легко взять дифференціалъ, но не отъ каждаго дифференціала интегралъ. Ибо легко можно безчисленное множество выдумать функций количества x и къ нимъ приставить dx , а интегралъ ихъ найти весьма трудно, или не возможно. Въ семъ по состояишъ главное упражненіе знаменитыхъ алгебраистовъ, чтобъ изъ разныхъ дифференціаловъ находить ихъ интегралы.

§ 16.

Оставляя многіе способы сыскивать интегралы предписанные въ пространныхъ сочиненіяхъ о интегральномъ вычисленіи, каковы суть Г. Ейлера, Сори, Кеспинера, Каршшена и проч. предложу только одно самое нужнѣйшее т. е. какъ брать интегралъ или сколько можно къ нему подходить ближе отъ такихъ дифференціальныхъ функций, въ кои входящъ количества разрѣшающіяся на безконечныя строки. Такъ на пр. дабы най-

ти интегралъ формулы $\frac{dx}{1+x}$, должно $\frac{1}{1+x}$

разрѣшить въ безконечную строку и по томъ сколько нибудь членовъ сея строки умноживъ на dx , взять ихъ интегралы обы-

кновеннымъ порядкомъ. Но $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3$ и

проч. по чему $\frac{d}{1+x} = dx - x dx + x^2 dx - x^3 dx \dots$

и проч. а сей строки интегралъ есть $x -$

$\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$ и проч. $= \int \frac{dx}{1+x}$. На семъ основа-

нїи всѣхъ подобныхъ дифференціаловъ интегралы брать можно, какъ по въ послѣдствїи показано будетъ. Такъ же дабы взять $\int dx \sqrt{a^2 - x^2}$ должно $\sqrt{a^2 - x^2}$ по Невтоновой формулѣ разрѣшить въ безконечную строку и каждой членъ умноживъ на dx брать ихъ интегралы, какъ то и учинено въ § 53. Подобно разсуждая должно и о прочихъ разрѣшимыхъ въ безконечныя строки количествахъ. О дифференціалахъ второй степени см. въ концѣ книги.

О кривыхъ линияхъ.

§ 1.

Всякому внимательному человеку не трудно усмотрѣть, что безчисленное есть множество нужныхъ и полезныхъ вещей натурою и искусствомъ производимыхъ, кои имѣють видъ криволинейный, однакожъ не круговой, а со вѣсьмъ особливою кривизною такъ, что по простой Геометріи его измѣрять и узнавать его свойства нѣтъ способа. Таковы снъ планетъ, таковы снъ лини бочбами и ядрами описываемыя, таковы многія зеркала, своды и проч. Многія изъ снхъ лини кривизною между собою различныхъ учеными людьми подведены подъ правила и свойства ихъ изъяснены такъ, что чрезъ сие употребленіе ихъ не только сдѣлалось понятнѣе, но и гораздо просираннѣе и великая часть Физики, Механики, Астрономіи и прочихъ многихъ наукъ на нихъ, какъ на единственномъ основаніи утвердилась. И такъ не лзя не имѣть любопытства узнать свойства снхъ кривыхъ лини и чрезъ то припсти въ состояніе разумѣть ихъ и употреблять. Краткое понятіе о снхъ удобно получить можно изъ слѣдующаго сокращенія *вышей Геометріи*, подъ которымъ именемъ обыкновенно разумѣется ученіе о кривыхъ

выхъ линияхъ. *Первая часть* высшей Геометріи будемъ содержать въ себѣ ученіе о сѣченіяхъ коническихъ; а *вторая* о другихъ кривыхъ линияхъ, при чемъ показано будемъ и употребленіе описанныхъ линій; а больше о семъ найши можно въ Физикъ Гиларовскаго.

§ 2.

Изъ пяти разныхъ образовъ разсѣченія прямого конуса на двѣ части, одинъ только производимъ въ разрубъ прямолинейную плоскость, а прочіе всѣ криволинейныя. Отъ сѣченія по самой оси производимъ равнобедренный прямолинейный треугольникъ, который и изображается весь конусъ; отъ параллельнаго оси сѣченія производитъ кривая линия окружающая разрубъ, которая называется *Гиперболою*, отъ параллельнаго боку конуса сѣченія производитъ *Парабола*, отъ параллельнаго основанію *Кругъ*, а отъ поперечнаго ни одной вещи изъ вышеозначенныхъ непараллельнаго сѣченія *Эллипсисъ*. Всѣ сии кривыя линіи кромѣ круговой разумѣются собственно подъ именемъ *сѣченій коническихъ*, а треугольникъ и кругъ разсматриваются въ простой Геометріи.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

§ 3

Свойства сѣченій коническихъ.

Дабы намъ найти *свойства* сихъ трехъ кривыхъ линей, представимъ мы себѣ 1) три конуса ϕ 1, 2, 3, изъ коихъ первый параболою, второй эллипсисомъ, а третій гиперболою пересѣкаются. 2) что каждое изъ сихъ сѣченій перерѣзывается кругомъ въ линіи ihm . 3) что въ срединѣ конуса какъ сквозь каждое изъ оныхъ трехъ сѣченій, такъ и чрезъ круги ихъ по діаметрамъ kl проходитъ треугольникъ ABC перпендикулярно. 4) общій разрѣзъ ih круга и коническаго сѣченія съ треугольникомъ, къ плоскости треугольника перпендикуларенъ. 5) что ih перпендикулярна къ діаметру круга kl и къ he . Ибо сіи линіи находящіяся на плоскости треугольника. Зная сіе удобно найти то, чего ищемъ.

§ 4.

Свойство параболы найдется слѣдующимъ образомъ: по причинѣ подобія треугольниковъ ehl и ecd фиг. 1 будетъ $eh : hl = de : dc$, или положивъ $eh = x$, $ed = 2a$, $dc = b$, $x :$

$hl = 2a : b$; отсюда $HL = \frac{bx}{2a}$. По томъ провед-

ши чрезъ e параллельную основанію $ef = c$; а слѣдственно $bd = kh$, (ибо ed парал-

лельна ab по произхожденію параболы) будетъ

$kh \cdot hl = \frac{cbx}{2a}$. Но какъ въ кругѣ квадраты

перпендикуляра ih возставающаго на діаметръ равенъ произведенію отрезковъ kh и hl ; то

назвавъ ih буквою y , будетъ $y^2 = \frac{cbx}{2a}$. Дабы

не дѣлать всегда для объясненія свойства параболы конуса и не проводить линей dc и ef , кои суть внѣ параболы; то къ тремъ линеймъ ed dc и fe приписываютъ четвертую пропорциональную, называютъ ее *параметромъ* и

означаютъ буквою p такъ, что $p = \frac{bc}{2a}$, а

$y^2 = px$. Сіе уравненіе изображаетъ свойство параболы.

§ 5.

Чтобъ какъ сіе уравненіе, такъ и прочія слѣдующія словами можно было удобно описывать и безъ фигуръ ясно себѣ представлять; то линеймъ въ оныя входящимъ даны разныя имена, а именно: линейа пересѣкающая по поламъ какія нибудь параллельныя линей отъ одной точки кривой линей къ другой проведенныя называется *діаметромъ* кривой линей; діаметръ пересѣкающій оныя параллельныя линей подъ прямымъ угломъ

ломъ называется *осью*; самыя параллельныя лини пересѣкаемыя по поламъ наименованы ординами діаметра или оси, смотря по углу пересѣченія; половины ихъ *полуординатами* или *алликатами*; точка, въ коей ось или діаметръ пересѣкающъ кривую линію *верхомъ оси или діаметра*. Двѣ такія точки опредѣляютъ длину оси. Часть оси или діаметра между верхомъ и аппликатою заключающаяся называется *абсциссою*. Абсцисса обыкновенно означаетъ буквою *x*, а аппликата буквою *y*.

§ 6.

Изъ сего видно, что въ фиг. 1. ед есть ось параболы; ибо она перпендикулярно раздѣляетъ im на двѣ равныя части въ h , за тѣмъ, что діаметръ kl перпендикулярную хорду всегда раздѣляетъ по поламъ. По сему $ih = y$ есть аппликата, а $eh = x$ есть абсцисса параболы и уравненіе изображающее свойство параболы состоитъ въ томъ, что квадратъ аппликаты всегда равенъ произведенію абсциссы и параметра, или $y^2 = px$.

§ 7.

Изъ уравненія сего слѣдуетъ: 1) поелику какія бы мы ни взяли абсциссы и аппликаты въ параболѣ, лини $2a$, b и c неперемѣнятся

няшся, какъ видно изъ фиг. 1, то $\frac{bc}{za} = p$
 есть количество постоянное. Следовательно
 взявши другую въ параболѣ абсциссу v и сооп-
 вѣствующую ей аппликашу z , получимъ y^2 :
 $z^2 = px$: pv или y^2 : $z^2 = x$: v т. е. квадраты
 аппликашъ параболы содержатся какъ сооп-
 вѣствующія имъ абсциссы, или z $y = \sqrt{v}$:
 \sqrt{x} , 2) ежели взявши произвольныя линей p
 и x найти къ нимъ среднюю пропорціональ-
 ную т. е. сложивъ ихъ вмѣстѣ въ одну пря-
 мую линей и описавъ изъ середины сей слож-
 ной линей кругъ, возставивъ изъ точки сово-
 купленія перпендикуляръ до окружности, ко-
 нцы его будутъ на параболѣ такъ, что
 увеличивая x и возставляя новые перпенди-
 кулары можно многія найти точки парабо-
 лы, чрезъ кои проведенная кривая линей и
 будетъ настоящая парабола; но есть лег-
 чайшій и вѣрнѣйшій способъ описывать па-
 раболу смотр. §. 17 3) ежели парабола уже
 описана, удобно найти параметръ взявши
 произвольную абсциссу и аппликашу и на-
 шедши къ нимъ третью пропорціальную ли-
 ней по простой Геометріи. 4) поелику $y =$
 $\pm \sqrt{px}$, то каждой абсциссѣ соопвѣствующи
 двѣ аппликашы одна положительная, а дру-
 гая отрицательная т. е. одна въ верхъ, а
 другая

другая въ низѣ перпендикулярно на оси возсавленные. 5) изъ уравненія $y = \pm \sqrt{px}$ видно, что когда x увеличивается, то увеличивается и y такъ, что не можетъ y быть равнымъ 0, сколько бы x ни былъ великъ. Слѣдовательно кривая линия ни гдѣ въ ту сторону, куда отъ верху берутся абсциссы, съ осью сойшися не можетъ или парабола имѣетъ какъ съ верху, такъ и съ низу двѣ безконечныя отрасли. 6) ежели взять абсциссу отрицательную т. е. представить, что она лежитъ отъ верху не въ ту сторону куда ось идетъ, а въ противную, то выйдетъ $y = \sqrt{-px}$. т. е. y не возможенъ.

§ 8.

Уравненіе для эллипсиса сыщется слѣд. образомъ: Въ фиг. 2 проведши dg и fe параллельно основанію конуса, выйдетъ во первыхъ для подобія треугольниковъ ehl , edg , ed : $dg = eh$, hl или $2a: b = x: hl$, полагая $ed = 2a$,

$dg = b$, $eh = x$. Отсюда $hl = \frac{bx}{2a}$. По томъ въ

подобныхъ треугольникахъ dkh и dfe , $ed: fe = dh: hk$ или $2a: c = 2a - x: hk$, гдѣ fe положено $= c$.

По сему $hk = c \left(\frac{2a-x}{2a} \right)$, а $hk \cdot hl = lh^2 = \frac{bcx}{4a^2}$.
($2a$

$$(2a-x) = px \frac{(2a-x)}{2a} = px - \frac{px^2}{2a}, = y^2, \text{ полагая}$$

такъ же какъ при параболѣ вмѣсто $\frac{bc}{a}$ параметръ p . И такъ уравненіе для эллипсиса состоитъ въ томъ, что квадратъ аппликаты равенъ произведенію параметра и абсциссы безъ произведенія абсциссы на четвертую пропорціальную линію къ оси, параметру и той же абсциссѣ; ибо ед есть ось по § 5.

§ 9.

Изъ уравненія сего прямо слѣдуетъ:

1) что поелику $\frac{bc}{2a}$ есть постоянное количество, какая бы абсцисса и аппликата ни

взяты были, то взявши другую абсциссу v и аппликату другую z , выйдетъ $z^2 \cdot y^2 = pv -$

$$\frac{pv^2}{2a} : px - \frac{pv^2}{2a} = 2av - v^2 : 2ax - vx = v(2a-v) : x$$

$(2a-x)$ т. е. квадраты аппликаты содержатся какъ произведенія отрѣзковъ оси 2) когда $x=2a$ тогда $y=0$ т. е. кривая линія сходится опять съ осью. 3) Положивъ дифференціалъ

ренціалъ у равнымъ о п. е д $V\left(px - \frac{p^2 x^2}{2a}\right) =$

$$pdx - \frac{p^2 dx}{a}$$

$$\frac{a}{2V\left(px - \frac{p^2 x^2}{2a}\right)} = 0, \text{ или } pdx = \frac{p^2 dx}{a}, \text{ выйдетъ } x = a$$

п. е. у бываетъ самый большій, когда онъ
возставленъ изъ середины оси и тогда онъ =

$$V \frac{ap}{2}, \text{ поставляя въ уравненіи } y^2 = px - \frac{p^2 x^2}{2a}$$

вмѣсто a , x , или $y^2 = \frac{ap}{2}$. Сія по аппликаша

въ срединѣ большей оси возставленная на-
зывается *меньшею полуосью*, или удвоена
будучи *осью меньшею*. И такъ назвавъ сію

ось $2b$, будетъ $b^2 = \frac{ap}{2}$, или $4b^2 = 2ap$ п. е.

меньшая ось есть средняя пропорціоная
между большею и параметромъ. 4) послѣку

$$y = \pm V\left(px - \frac{p^2 x^2}{2a}\right); \text{ по аппликашѣ эллипсиса для}$$

одной абсциссы суть двойныя, одна въ верхъ,
а другая въ низъ на оси возспавленные. 5)
по даннымъ тремъ вещамъ изъ чепырехъ

$2a$,

2а, р, х. у всегда можно найти четвертую и по правилам Геометрическимъ сооритиъ.

§ 10.

Остается теперь вывести уравненіе для гиперболы. Продолживъ въ фиг. 3. аВ и he до соединенія ихъ въ d и проводя чрезъ d параллельную съ основаніемъ dg, по причинѣ подобія треугольниковъ ehl, edg въ коихъ углы при e вертикальные, а углы g и l накрестъ, получимъ $ed:dg = eh:hl$ или положивъ $ed=2a$, $dg=b$, $eh=x$, $2a:b=x:hl$, откуда $hl=$

$\frac{bx}{2a}$. Такъ же въ подобныхъ треугольникахъ dfe

и dkh, $de:fe = dh:kh$ или полагая $ef=c$, $2a:c=2a+x:$

kh. По сему $kh = \frac{c(2a+x)}{2a}$, а kh. $hl = h^2 = y^2 =$

$\frac{bc(2a+x)}{4a^2}$; а еслили положить какъ и преж-

де вмѣсто $\frac{bc}{2a}$ четвертую пропорціальную

р, то $y^2 = px + \frac{p^2x^2}{2a}$ т. е. квадратъ аппликаты

равенъ произведенію абсциссы на параметръ сложенному съ произведеніемъ абсциссы на

четв-

четвертую пропорційальную линію къ оси, параметру и тойже абсциссѣ; ибо ед есть ось иперболы по § II.

§ II.

Уравненіе сіе показываетъ 1) что ипербола ошъ еллипсиса только разнится +, 2)

что, поелику $y = \pm \sqrt{p + \frac{px^2}{2a}}$; то двѣ аппли-

кашымѣетъ каждая абсцисса, изъ коихъ одна въ верхъ, а другая въ низъ возставлена. 3) что ежели увеличивается x ; то увеличивается и y такъ, что ипербола ошходитъ безконечно далеко ошъ своего верха, какъ нынѣ абсциссѣ такъ и ниже. 4) что ежели x положимъ $= -2a$; то $y = 0$ п. е. ежели продолжимъ линію АВ фиг. 6, на которой берутся абсциссы, на $2a$ въ противную сторону ошъ верха; то въ другомъ концѣ ея В, $y = 0$ п. е. кривая линія съ нею сойдется и слѣдственно имѣетъ два верха А и В. Ежели же положить $x = -$

$$3a, \text{ то } y^2 = -3ap + \frac{9ap}{2} = \frac{3ap}{2} \text{ или } y = \sqrt{\frac{3ap}{2}}$$

п. е. y будетъ положительное количество. Увеличимъ еще x такъ, что онъ $= 4a$; то

$$y^2 = -4ap + \frac{16ap}{2} = 8ap \text{ и } y = \sqrt{8ap}. \text{ Сіе показываетъ, что } y \text{ стѣмъ болѣе становится, чѣмъ болѣе}$$

удаляется

удаляется отъ другой точки В соединенія кривой лини съ линеею, на коей абсциссы берутся, или что гипербола и отъ другаго своего верха В удаляется безконечно далеко, что абсциссы и аппликаты берутся на продолженной оси въ обѣ стороны и что гипербола имѣетъ такой видъ, какъ въ фиг. 6 представлено. Линия перпендикулярно проходящая чрезъ центръ гиперболы с и равная V ар или средняя пропорціональная между большою осью и параметромъ называется меньшею

осью 5) что поелику $\frac{bc}{2a} = p$, какія бы абсциссы и аппликаты ни взяты были, есть количество постоянное; то взявъ другую абсциссу v , и другую аппликату z , выйдетъ z^2 :

$$y^2 = pv + \frac{p u^2}{2a} : p + \frac{p^2}{2a} = v (2a + u) : x (2a + x) \text{ п. е.}$$

квадраты аппликатъ содержатся какъ суммы абсциссъ съ большою осью умноженные на абсциссы.

Примѣчаніе 1. Зная изъ Геометріи, что перпендикуляръ изъ окружности на діаметръ опущенный равенъ корню произведенія отърѣзковъ діаметра и ясно видя изъ § 5, что сей перпендикуляръ есть аппликата круга, и одинъ изъ отрѣзковъ абсцисса, не трудно по-

но понять, что въ кругѣ $y^2 = 2ax - xx$, полагая діаметръ $= 2a$.

Примѣчаніе 2. Можно такъ же и въ треугольникѣ прямолинейномъ АFG фиг. 7 на одномъ боку взять какія нибудь части АС, АЕ, АГ и изъ С, Е и Г провести параллельныя съ основаніемъ FG, чтобъ имѣть абсциссы, аппликаты и ихъ содержаніе. Для сего назвавши сторону AG буквою а, FG буквою b, и положивъ АС или АЕ $= x$, а ВС или DE $= y$, удобно усмотрѣть, что по причинѣ параллельнаго положенія ВС и DE съ FG, вый-

детъ пропорція $x : y = a : b$ и $y = \frac{bx}{a}$. Въ семъ состоитъ уравненіе для прямой линіи.

Примѣчаніе 3. Въ разсужденіи уравненія Еллипсиса, Иперболы и Круга замѣпить должно, что Математики находятъ иногда въ томъ выгоду, чтобъ не абсциссу называть буквою x, а сумму полуоси и абсциссы въ Иперболѣ и разность ихъ въ двухъ другихъ линіяхъ. Тогда уже абсцисса въ Иперболѣ будетъ $= x - a$, а въ кругѣ и еллипсисѣ $= a - x$. Такъ уравненіе

Еллипсиса $y^2 = px - \frac{p^2 x^2}{2a}$ будетъ такое: $\frac{p}{2a}$
 ($aa - xx$), въ кругѣ y^2 будетъ $= aa - xx$, а въ
 В Иперболѣ

Иперболѣ $y^2 = \frac{p}{2a} (xx - aa)$. Выгода сія состоитъ въ томъ, что корни квадратные удобнѣе извлекаются изъ суммы квадратовъ $a^2 + x^2$, или изъ разности ихъ $a^2 - x^2$, нежели изъ $2ax \pm xx$.

Примѣчаніе 4. Поелику меньшая ось въ Эллипсисѣ и Иперболѣ $= \sqrt{2}ar$; то положивъ ее

$= 2b$, получимъ $4b^2 = 2ar$ и $r = \frac{2b^2}{a}$. По сему уравненію въ Эллипсисѣ будетъ $y^2 = \frac{2b^2x - b^2xx}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}$

$(2ax - xx)$; а въ Иперболѣ $\frac{b^2}{a^2} (2ax + xx)$.

Примѣчаніе 5. Если въ Иперболѣ обѣ оси равны между собою; то $y^2 = 2ax + xx$ и такая Ипербола называется равносѣчною. Въ ней какъ видно $2a = p = 2b$.

§ 12.

Фокусы.

Точка на оси какого нибудь сѣченія взятая, въ коей аппликата равна половинѣ параметра, называется *фокусомъ*, и имѣетъ нѣко-
нѣко-

нѣкоторыя особливые свойства, какъ то послѣ показано будетъ. По сему опредѣленію удобно найди разстояніе фокуса отъ верха сѣченій.

§ 13.

Во первыхъ въ Параболѣ положивъ сіе разстояніе $= x$, выйдетъ аппликаша въ немъ $=$

$\frac{p}{2}$. По сему $\frac{p^2}{4} = px$ или $x = \frac{p}{4}$ ш. с. фокусъ F Параболы фиг. 4. отстоитъ отъ ея верха A на $\frac{1}{4}$ параметра.

§ 14.

Во вторыхъ въ Эллипсисѣ, естли x означитъ разстояніе фокуса отъ верха, то

$$\frac{p^2}{4} = px - \frac{p^2 x^2}{2a}, \text{ или } \frac{p}{4} = \frac{2ax - x^2}{2a}; \text{ отсюда } [xx -$$

$$2ax = -\frac{ap}{2}; \text{ а } x = a + \sqrt{a^2 - \frac{ap}{2}}. \text{ Изъ сего видно,}$$

что Эллипсисъ имѣетъ два фокуса, изъ ко-

$$ихъ разстояніе одного отъ верха $= a + \sqrt{a^2 - \frac{ap}{2}}$,$$

$$\text{а другого } a - \sqrt{a^2 - \frac{ap}{2}}. \text{ По сему назначивъ два}$$

фокуса фиг. 5 F и f легко уемотрѣть 1)
 что разстояніе ихъ самихъ Ff будетъ $2\sqrt{a^2 - \frac{ap}{2}}$
 2) что разстояніе каждаго фокуса отъ

средины $= \sqrt{a^2 - \frac{ap}{2}}$ 3) что возстановивъ изъ

средины оси C перпендикуляръ $CM = \sqrt{\frac{ap}{2}} = b$

смотримъ § 9 и проводимъ линію MF или Mf , по-

лучимъ $MF^2 = Mf^2 = \frac{ap}{2} + a^2 - \frac{ap}{2}$. По сему $MF =$

$IM = a$ т. е. линіи изъ фокусовъ проведенныя
 къверху меньшей оси равны порознь половинамъ
 большей оси. На семъ основывается способъ
 въ данномъ Еллипсисѣ находить фокусы. Для
 сего изъ точки M должно радіусомъ $= a$, опи-
 сать дугу, то она пресѣчетъ ось въ двухъ
 фокусахъ F и f .

§ 15.

Въ прѣдѣлахъ въ разсужденіи Иперболы,

не премѣняя значенія x , выйдетъ $xr + \frac{pxx}{2a} =$

$\frac{p^2}{4}$, $2ax + xx = \frac{ap}{2}$. По чему $x = -a \pm \sqrt{a^2 + \frac{ap}{2}}$. От-

сюда

сюда слѣдуетъ 1) что Гипербола имѣетъ такъ же два фокуса , коихъ разстояніе отъ какого нибудь верха на пр. А фиг.

$b = -a + \sqrt{a^2 + \frac{ap}{2}}$. 2) Что ежели въ срединѣ оси

возставишь перпендикуляръ CZ равный $\sqrt{\frac{ap}{2}}$

смотримъ § II и проведемъ линію ZA, то $AZ^2 =$

$\frac{ap}{2} + a^2$, и $AZ = \sqrt{\frac{ap}{2} + a^2}$. И такъ ежели ра-

діусомъ AZ изъ C описать Кругъ, то онъ пресѣчетъ продолженную ось въ двухъ точкахъ F и f, кои будутъ фокусы. Ибо одной точки на пр. F разстояніе отъ верха A бу-

детъ $-a + \sqrt{a^2 + \frac{ap}{2}} = \sqrt{a^2 + \frac{ap}{2}} - a$, а другой $-\sqrt{a^2 +$

$\frac{ap}{2}} - a$, гдѣ—означаетъ только то, что сей

фокусъ на другой сторонѣ отъ верху , или

что разстояніе его $= a + \sqrt{a^2 + \frac{ap}{2}}$ взятое въ

противную сторону. 3) По сему разстояніе

обоихъ фокусовъ $= 2\sqrt{a^2 + \frac{ap}{2}}$, и каждого отъ

$$\text{центра} = V(a^2 + \frac{p^2}{2}).$$

§ 16.

Радиусы движенія.

Линія проведенная изъ фокуса къ какой нибудь точкѣ сѣченія называется радиусомъ движенія (radius Vector) Радиусъ движенія FH фиг 4. въ

$$\text{Параболѣ} = V(HF^2 + FP^2) = V(y^2 + (x - \frac{p}{4})^2); \text{ ибо } FP = x - \frac{p}{4}$$

$$\text{АФ. И такъ } FH^2 = px + x^2 - \frac{px}{2} + \frac{p^2}{16} = x^2 + \frac{px}{2} - \frac{p^2}{16}$$

$\frac{p^2}{16}$ и $FH = x + \frac{1}{4} p$ ш. е. равенъ абсциссѣ сложенной съ разстояніемъ фокуса.

§ 17.

На семъ основывается легчайшій и вѣрнѣйшій способъ описывать Параболу. Для сего по данному параметру нашедши разстояніе фокуса F фиг. 8 ось произвольно взятаго верха А. поставь перпендикулярно къ АФ линейку AZ, утверди ее неподвижно, приложи къ ней плотно линейку НМ, къ коей концу Н и точкѣ F привяжи нипку длиною равную НМ+FA, а по томъ натянувъ нипку каранда-

карандашемъ до А води линейку МН по АЗ такъ, чтобъ карандашъ съ натянутою ниткою всегда подлѣ НМ находился; тогда онъ опишетъ дугу параболическую. Ибо сколько бы МН ни оподвинулась отъ РА, всегда часть нитки FD натянутая карандашемъ D равна будетъ MD + AF за тѣмъ, что вся нитка = AF + НМ, а часть ее HD лежишь при линейкѣ. Слѣдовательно $FD = AP + AF$, ежели PD есть аппликата; а потому FD всегда есть радіусъ движенія, или D находишь на Параболѣ.

Примѣчаніе 1. По сему ежели даны двѣ линии АВ и AD фиг. 29, къ коимъ требуется найти двѣ среднія пропорціональныя; то взявъ за параметръ АВ описатьъ должно параболу АНС, по томъ параметромъ AD описатьъ параболу ХАН, изъ точки пересѣченія ихъ Н опустить на оси ихъ перпендикуляры НR и КН; то они и будутъ искомыя двѣ среднія пропорціональныя линии между АВ и AD. Ибо по свойству Параболы $RH^2 = AR \cdot AV$, и $KN^2 = AR^2 = RH \cdot AD$. т. е. АВ: RH = RH: AR. и RH: AR = AR: AD.

Примѣчаніе 2. Когда требуется удвоить кубъ, или сдѣлать $m^3 = 2a^3$; тогда стоить только къ линеймъ 2a и a найти вторую изъ двухъ среднихъ пропорціональныхъ линий, ибо ища между b и c двѣ

В 4

среднія

среднія линей х и у надобно сдѣлать двѣ пропорціи; $b: x = x: y$ и $x: y = y: c$ Слѣд. $x^2 = by$, и $y^2 = cx$. По сему $c^2 b = y^3$, или полагая $b = 2a$, а $c = a$, получимъ $2a^3 = y^3$, $x^3 = 4a^3$. Изъ сего видно, что искомаго куба бокъ есть вторая изъ двухъ среднихъ пропорціональныхъ линей между $2a$ и a .

§ 18.

Дабы опредѣлить радіусы движенія FH и FN фиг. 5 въ Еллиписѣ положимъ, что PH есть аппликаша $= y$, PC $= c$, то AP $= a - c$ (ибо ось АВ всегда равна $2a$). По сему р. AP — р

$$\frac{AP^2}{2a} = y^2 - ap - pc - \frac{a^2 p + 2acp - c^2 p}{2a} = ap - pc - \frac{ap}{2} + cp -$$

$$\frac{c^2 p}{2a} - \frac{ap}{2} - \frac{c^2 p}{2a}, \text{ разстояніе фокусовъ отъ цен-}$$

тра $V(a^2 - \frac{ap}{2})$, назовемъ буквою f такъ, что

$$FC = fC = f. \text{ И такъ } FP = f - c, \text{ а } fP = f + c, FP^2 =$$

$$f^2 - 2fc + c^2, FP^2 + PH^2 = FH^2 = f^2 - 2fc + c^2 + \frac{ap}{2} - \frac{c^2 p}{2a}.$$

$$\text{Но какъ } f^2 = \frac{2a^2 - ap}{2}, \text{ то } FH^2 = a^2 + c^2 - 2fc - \frac{c^2 p}{2a}.$$

$$\text{Вмѣсто } c^2 - \frac{c^2 p}{2a}, \text{ можно поставитьъ } c^2 \frac{(2a - p)}{2a} =$$

$$c^2 \frac{(4a^2 - 2ap)}{4a^2} = \frac{c^2 f^2}{a^2} \text{ такъ, что } FH^2 = a^2 - 2fc + \frac{c^2 f^2}{a^2}$$

а $FH = a - \frac{cf}{a}$; что же касается до fH^2 ; то она

$$= fP^2 + PH^2. \text{ т. е. } f^2 + 2fc + c^2 + \frac{ap}{2} - \frac{c^2 p}{2a}. \text{ Пос-}$$

лику сие уравненіе нѣмѣ разнится отъ ура-

$$\text{вненія } f^2 - 2fc + c^2 + \frac{ap}{2} - \frac{c^2 p}{2a}, \text{ что во второмѣ}$$

членѣ вмѣсто $-$ стоитъ $+$; то сдѣлавши въ немѣ такую же перемѣну, какъ въ прежнемѣ,

$$\text{выйдетъ } fH = a + \frac{fc}{a}. \text{ По сему } FH + Hf = 2a, \text{ т. е.}$$

въ Еллипсисѣ сумма радіусовѣ движенія всегда равна большой оси. На семѣ основывается слѣдующій способъ описывать Еллипсисѣ: взявши произвольную ось АВ и фокусы F и f, воткну въ нихъ булавки или гвоздочки и положивъ на нихъ нитку концами связанную, равную АВ + Ff, натяни ее карандашемъ и води кругомъ гвоздей, то карандашъ опишетъ Еллипсисѣ. Ибо какъ нитка = АВ + Ff, то радіусы движенія вмѣстѣ сложенные всегда будутъ равны АВ и по тому точки ихъ соединенія всегда будутъ на Еллипсисѣ.

§ 19.

По сему можно весьма удобно проводить такія линии къ даннымъ точкамъ Еллипсиса, кои только бы въ одной точкѣ къ нему прикасались. Должно провести радіусы движенія FN и fN фиг. 10 продолжишь больший изъ нихъ fN столько, чтобъ $NN' = FN$, по томъ чрезъ средину M линии NF и чрезъ точку N проведенная линия Tu будетъ только одну точку N общую имѣть съ Еллипсисомъ. Ибо какъ треугольникъ $NHM = MNH$; то Tu къ NF перпендикулярна. По сему отъ всякой точки u на линіѣ Tu взятой проведенныя линии къ концамъ NF равны между собою, ш. е. $Ny = Fu$. Но какъ $Ny + fu > Nf > 2a$, то $Fy + uf > 2a$, или точка u не находится на Еллипсисѣ.

§ 20.

Изъ сего слѣдуетъ 1) что радіусы движенія въ Еллипсисѣ равные углы составляютъ съ прикасающеюся къ Еллипсису въ точкѣ ихъ соединенія линією, Ибо уголъ $NHM = MNH$, но $NHM = uNf$. Слѣдовательно $MNH = uNf$. По сему каждое совершенно упругое шѣло брошенное изъ одного фокуса въ дугу Еллипсиса по отраженіи должно отскакивать въ другой фокусъ. Особливо сіе примѣнно на весьма упругихъ

гихъ тѣлахъ, какъ то въ воздухѣ и свѣшѣ.

§ 21.

Такимъ же образомъ какъ въ Эллипсисѣ, съ-
шутся радіусы движенія Иперболы fH и FH фиг.
6. Ибо положивъ $BA = 2a$, $CP = c$. $CF = Cf = f$, вый-
демъ $AP = c - a$, $FP = c - f$, а $fP = c + f$. По чему $P.AP + p$,

$$\frac{AP^2}{2a} = cp - ap + \frac{c^2p - 2acp + a^2p}{2a} = \frac{c^2p - ap}{2a} = y^2 = PH^2.$$

$$\text{Слѣдственно } FH^2 = PH^2 + FP^2 = \frac{c^2p}{2a} - \frac{ap^2}{2} + c - 2cf +$$

f^2 . Но какъ $f^2 = \frac{2a^2 + ap}{2}$, то будетъ $FH^2 = a^2 + \frac{c^2p}{2a}$
 $+ c^2 - 2cf$. Ежели же въ семъ уравненіи поста-

вить вмѣсто $\frac{c^2p}{2a} + c^2$, $c^2 \frac{(p+2a)}{2a}$, или $c^2 \frac{(2ap+4a^2)}{4a^2}$,

или $\frac{c^2f^2}{a^2}$, получимъ $FH^2 = a^2 - 2cf + \frac{c^2f^2}{a^2}$, а $FH = \frac{cf}{a}$

-а, ибо f одинъ больше a . Точно такъ же със-

кажь можно, что $fH = \frac{cf}{a} + a$. Посему $fH - FH =$

$2a$ п. е. въ Иперболѣ разность радіусовъ
движенія всегда равна большой оси. Сіе свой-
ство Иперболы даетъ способъ ее описывать.

Имѣя

Имѣя данныя двѣ вещи большую ось и параметръ, проводи линеею АВ равную большей оси, фиг. 9 и продолживъ ее, означь на ней фокусы F и f показаннымъ способомъ въ § 15 и вошки въ нихъ гвоздочки, на гвоздь f надѣнь линейку fC скважинкою въ одномъ концѣ ея сдѣланною, къ другому концу линейки C привяжи конецъ нитки, другой же конецъ ея укрѣпи въ F. Длина нитки должна быть равна линейкѣ безъ оси или fC—AB. По томъ натянувъ нитку карандашемъ опдвигай линейку отъ АВ около f такъ, чтобъ карандашъ всегда былъ подлѣ линейки, то онъ опишетъ Иперболу. Ибо въ какой бы точкѣ М онъ ни находился, всегда $fM - FM = AB$ за тѣмъ, что $fM + MC - (FM + MC) = AB$. И такъ всегда разность радіусовъ движенія будетъ равна АВ.

§ 22.

Точно такъ же и въ Иперболѣ какъ въ Еллиписѣ проводить можно тангенсъ и доказать, что радіусы движенія съ тангенсомъ составляющъ равные углы, только для сего не должно продолжать большаго радіуса движенія fH, а надобно на немъ взять фиг. 6. $HN = HF$ и чрезъ средину М линии NF провести линеею TH, то она и будетъ прикасаться къ Иперболѣ только въ одной точкѣ Н;

Н: ибо отъ каждой почки у проведенныя къ концамъ NF линей уN и уF суть равны между собою, какъ выше доказано, и слѣдовательно вмѣсто уN можно поставитъ уF. Но $уF - уN < Nf < 2a$. Слѣдовательно $уF - уF < 2a$. По сему у находится не на Иперболѣ и нѣтъ ни одной почки кромѣ N находящейся на Иперболѣ; такъ же уголъ $MHN = FHM$ или $HNМ = FHM$.

§ 23.

Ежели изъ центра С Еллипсиса фиг. 10 и Иперболы фиг. 24 провести линей къ срединѣ М линей NF; то сѣя линей CM будетъ равна большой полуоси. Ибо какъ $FM = NM$, такъ и $FC = Cf$ и при томъ уголъ F въ обоихъ треугольникахъ FMC и FNf общій. По чему Nf непременно параллельна MC за тѣмъ, что иначе отрѣзки боковъ не были бы пропорціональны, и Nf въ двое больше MC; а извѣстно, что $Nf = 2a$. слѣд. $MC = a$.

§ 24.

Субт. и Субнорм.

Линей TH въ фиг. 4, 5 и 6 касающаяся кривыхъ линей въ почкѣ Н, а не пресѣкающая оныхъ называется *касательною линією или тангенсомъ*. Линей TP находящаяся между

между почкою соединенія Т тангенса съ большою осью, и аппликашою НР изъ точки прикосновенія Н опущенною называется *субтангенсомъ*. Перпендикуляръ къ тангенсу въ точкѣ прикосновенія Н возставленный и на оси оканчивающійся, какъ НL, именуется линеею *нормальною* а между почками соединенія НL и аппликаты НР съ осью, находящаяся линия РL *субнормальною*.

§ 25

Для опредѣленія всѣхъ сихъ линей можно вывести общее правило слѣдующимъ образомъ: линия АНD фиг. II. означаетъ какую нибудь кривую линеею. ТН тангенсъ въ точкѣ Н ТР субтангенсъ, НК нормальная, РК субнормальная, НР и DL безконечно малое разстоянiе имѣющія аппликаты шакъ что какъ НР, шакъ и DR суть количества безмѣрно малыя и дуга НD отъ прямой линееи чрезвычайно мало разнишся. И шакъ положивъ $AP=x$, $HP=y$, $TP=$ субтангенсу будетъ $PL=HR=dx$, $DR=dy$. Поелику треугольнички HDR и ТНР по причинѣ равенства угловъ Р и R, подобны; то $TP:PH=HR:DR$ т. е.

$$\text{субт: } y = dx: dy, \text{ или субтангенсъ} = \frac{ydx}{dy}$$

Такъ же поелику уголъ $PHR=90^\circ=KHD$; то вычешши изъ нихъ общій KHR , выйдетъ $RHK=RHD$, а какъ при шомъ $P=R$, слѣдуетъ, что треуголь-

угольники HRD и RHK подобны. По сему РК:
 $RH = DR$. HR или субнорм: $y = dy: dx$ и суб-

$$\text{норм} = \frac{ydy}{dx}.$$

§ 26.

Посредствомъ сихъ двухъ уравненій и
 опредѣленія по свойству кривыхъ линий, че-

му равно $\frac{ydx}{dy}$, или $\frac{ydy}{dx}$, весьма удобно на-

ходить какъ субтангенсы, такъ и субнор-
 мальные. Что же касается до тангенсовъ и
 нормальныхъ, то зная субтангенсъ или суб-
 нормальную и аппликашу весьма удобно ихъ
 опредѣлить по Пифагоровой теоремѣ.

§ 27.

Во первыхъ въ Параболѣ поелику $y^2 = px$ и

$2ydy = pdx$; то $\frac{ydv}{dx} = \frac{p}{2}$ т. е. субнормальная

равна половинѣ параметра. Умноживъ диффе-
 ренціальное уравненіе съ обѣихъ сторонъ на-

y , будетъ $2y^2dy = pydx$; и $\frac{ydx}{dy} = \frac{2y^2}{p} = \frac{2px}{p} = 2x$

т. е. субтангенсъ всегда равенъ удвоенной
 абсциссѣ.

абсциссѣ. Слѣдовательно и линия $AT = x$
фиг. 4.

§ 28.

Во вшорыхъ въ Еллипсисѣ изъ уравненія $y^2 =$

$px - \frac{p^2 x^2}{2a}$ видно, что $4ay dy = 2ap dx - 2p^2 x dx$ и

$\frac{y dv}{dx} = \frac{ap - p^2 x}{2a}$. $2ay^2 dy = apy dx - p^2 xy dx$. Отсюда $\frac{y dx}{dy} =$

$\frac{2ay^2}{ap - p^2 x} = \frac{2apx - p^2 x^2}{ap - p^2 x} = \frac{2ax - p^2 x}{a - p^2 x}$ По сему AT

(фиг. 5) $= \frac{2ax - p^2 x}{a - p^2 x} - x = \frac{ax}{a - p^2 x}$

§ 29.

въ Иперболѣ изъ уравненія $y^2 = px + \frac{p^2 x^2}{2a}$
слѣдуетъ, что $4ay dy = 2ap dx + 2p^2 x dx$ или $2ay dy =$

$ap dx + p^2 x dx$, отсюда $\frac{y dv}{dx} = \frac{ap + p^2 x}{2a}$; а умноживъ на y
прежнее уравненіе, будетъ $2ay^2 dy = apy dx + p^2 xy dx$.

Отсюда $\frac{y dx}{dy} = \frac{2ay^2}{ap + p^2 x} = \frac{2apx + p^2 x^2}{ap + p^2 x} = \frac{2ax + p^2 x}{a + p^2 x}$. По

сему AT (фиг. 6) $= \frac{ax}{a + p^2 x}$.

§ 3

И такъ субтангенсъ ; и а субнормальная

$$\text{въ Параболѣ} = 2x ; = \frac{p}{2}$$

$$\text{въ Еллипсисѣ} = \frac{2ax - xx}{a - x} ; = \frac{ap - px}{2a}$$

$$\text{въ Иперболѣ} = \frac{2ax + xx}{a + x} ; = \frac{ap + px}{2a}$$

Въ разсужденіи формулъ замѣнить должно, что зная одну для Еллипсиса или Иперболы приисканную легко найши оспальную, и для Параболы. формулы для еллипсиса разнятся только отъ иперболическихъ знакомъ —; а для Параболы стоить только положить $a = \infty$ (ибо ось въ Параболѣ безконечно велика) и по томъ членъ въ сравненіи съ безконечностію ничего не стоящій

изтребить. Такъ на пр. $\frac{ap + px}{2a}$ для Параболы

$$\frac{\infty p + px}{2\infty} = \frac{\infty p}{2\infty} = \frac{p}{2} ; \text{ такъ же } \frac{2ax - xx}{a - x} = \frac{2\infty x - xx}{\infty - x}$$

$= 2x$. Что же касается до тангенсовъ и нормальныхъ; то для опредѣленія ихъ знаменованія стоить только къ квадрату субтангенса или субнормальной придавать по свой-

ству кривой линии y^2 , какъ то въ фиг. 4, 5 и 6 удобно примѣнить можно.

§ 31.

Отсюда можно вывести нѣкоторыя слѣдствія въ разсужденіи Параболы. 1) Велику $TF = x + \frac{1}{4} p$ (фиг. 4) и $FN = x + \frac{1}{4} p$ (по § 16), то треугольникъ TNF есть равнобедренный и слѣдственно $\angle T = \angle F$, или ежели провести параллельную съ осью линію HM , то уголъ $MNZ = \angle T$. По сему ежели въ Параболу ударится какое нибудь совершенно упругое шѣло по линіи MN , должно будетъ отразиться въ фокусѣ. Ибо тогда уголъ паденія будетъ MNZ , а уголъ отраженія, который всегда бываетъ ему равенъ, $\angle FNT$, Сіе самое свойство дѣлаетъ зеркала параболическія весьма сильно зажигающими. Ибо всѣ лучи параллельные оси по отраженіи собираются въ фокусѣ и тамъ находящіяся горючія вещи зажигаютъ. По причинѣ сего же самаго свойства параболическая фигура съ великою пользою употреблена быть можетъ для говорныхъ и слуховыхъ трубъ. Ежели*полой съ обѣихъ сторонъ сосуда дор фиг, 12 имѣетъ такую фигуру, какая должна произойти отъ обращенія полупараболы около своей оси OM и ежели въ узкомъ отверстіи сосуда о находится фокусъ сего Параболы; то онъ изрядную составитъ говорную трубу. Ибо голосъ выходящій изъ

почки о по удареніи обѣ какуюнибудь почку в или с непременно приметъ параллельное оси направленіе bt, ct по тому, что уголъ $obr = sbr$ и слѣдственно звукъ единственно уснареніи въ направленіи оси и произведетъ большее дѣйствіе, нежели какому при разсѣянніи его во всѣ стороны, воспослѣдовать бы надлежало. Можно приладить къ сему сосуду другой еллиптической of фиг. 13, котораго одинъ фокусъ въ о, а другой вмѣстѣ съ фокусомъ Параболы въ f такъ, что голосъ изъ о выходящій по отраженіи обѣ спѣны Еллипсоида въ р и р сгущается въ узкомъ проходѣ f и чрезъ взаимное частицъ воздуха удареніе увеличиваясь послѣ ударяется съ великою силою въ т и т и принимаетъ направленіе такъ же параллельное оси. Сосудъ имѣющій фигуру параболическаго коноида, ко- его фокусъ находится въ f фиг. 14 съ при- дѣланнымъ къ нему изогнутымъ рогами fn составляетъ весьма хорошую слуховую трубу. Ибо ежели вложить узкой конецъ n рога въ ухо человека мало слышащаго и говорить въ широкое отверстіе, то всѣ параллельно оси падающія частицы воздуха mt, mt по отраженіи отъ вогнутости коноида въ т и т сойдутся въ f, откуда продолжая движеніе по рогу fn приведутъ сгущеніемъ своимъ и взаимнымъ отраженіемъ воздухъ въ

ухѣ находящійся въ чрезвычайное сопряженіе, а чрезъ то слабому орудію слуха великую сдѣлають помощь. Для самаго крѣпкаго уха можно употребить эллиптическую трубу фиг. 15. коея фокусы суть o и f . Изъ o исходящій голосъ по отраженіи и сгущеніи въ f съ необычайною силою дѣйствовать будетъ на ухо, въ кое узкой конецъ рога вложенъ.

2) По сему удобно проводить тангенсъ къ какой нибудь точкѣ N Параболы фиг. 4. Для сего изъ N опусти перпендикуляръ NP на ось, абсциссу AP продолжи далѣе верха до T такъ, r то бы AT — была AP . Тогда изъ T къ N проведенная прямая линия будетъ тангенсъ. Ибо TP будетъ субтангенсъ по опредѣленію его. Сіе примѣчаніе для Эллипсиса и Иперболы сдѣлано уже при удобнѣйшемъ случаѣ выше.

§ 32.

Опуск. на танг. изъ фокусовъ перпендикулары.

Опускаемые изъ фокусовъ на тангенсы перпендикулары заслуживаютъ особливое вниманіе по своему въ Астрономіи и другихъ наукахъ употребленію. Въ параболѣ квадратъ сего перпендикулара FK равенъ радіусу движенія умноженному на $\frac{1}{4}$ параметра, или фиг. 4. FK — FN . $\frac{1}{4}$ P . Поелику TFN есть треуголь-

никъ

никъ равнобедренный по пункту 1 § 31; то FK раздѣляетъ основаніе TH по поламъ. По сему

$$KH^2 = \frac{1}{4} TH^2 = \frac{1}{4} (4x^2 + px) = x^2 + \frac{px}{4} \text{ по } § 30,$$

а вычислено будучи изъ $FH^2 = \frac{(x+p)^2}{4}$ даетъ $FK^2 =$

$$\frac{px}{4} + \frac{p^2}{16} = \frac{p}{4} \left(\frac{p+x}{4} \right). \text{ Отсюда слѣдуетъ, что}$$

перпендикуляры изъ фокуса параболы на тангенсъ опускаемые пропорціональны корнямъ квадратнымъ радіусовъ движенія. Ибо $FK^2 =$

$$\frac{p}{4} \left(\frac{p+x}{4} \right), \text{ а } p \text{ есть количество постоянное.}$$

По сему $FK = \sqrt{\frac{p+x}{4}} = \sqrt{FH}$.

§ 33.

Ежели изъ центра С Еллипсиса фиг. 10 и Иперболы фиг. 24 радіусомъ равнымъ полуоси АС описатьъ кругъ; то концы m и d перпендикуляровъ изъ фокусовъ на тангенсъ опущенныхъ fd и fm будутъ находиться на его окружности. Подобно мз параллельна nf, какъ доказано въ § 21 и mf упадая подъ прямымъ угломъ на тангенсъ, къ которому перпендикулярна fd, непременно ей параллельна. И шакъ mnfz есть

параллелограмъ и $Nf = 2a = Mz$ смот. § 19. По сему Mz есть діаметръ описаннаго круга, а какъ уголъ Mdz есть прямой, то стоящій на діаметрѣ концами боковъ треугольникъ Mdz прямоугольный при d , какъ верхъ свой d такъ и концы M и z имѣютъ на окружности онаго круга, что извѣстно изъ простой Геометріи. Отсюда не трудно вывести, что произведеніе перпендикуларовъ FM и fd всегда равно квадрату меньшей полуоси. Ибо по свойству круга произведенія отрѣзковъ хордъ всегда равны между собою т. е. $df \cdot fz = Af \cdot fB$. И такъ назвавши разстояніе фокуса отъ центра $V(a^2 - b^2)$ буквою c , выйдетъ $Af = a + c$, а $fB = a - c$ и $Af \cdot fB = a^2 - c^2 = a^2 - a^2 + b^2 = b^2$. Слѣдовательно $df \cdot fz = df \cdot NM = df \cdot FM = b^2$. Что же касается до Иперболы фиг. 24. $fB \cdot fd = fz \cdot fA$ по свойству линей изъ внѣ пересѣкающихся кругъ, или $fB \cdot fA = fd \cdot fz = fd \cdot FM$ и какъ $fB \cdot fA$,

полагая $cf = c'f = V(a^2 - \frac{ap}{2})$ равна c , будетъ

$$= (a - c) (a + c) = a^2 - c^2 = \frac{ap}{2} = b^2 \text{ по §}$$

и пункт. 4; слѣдовательно $fd \cdot FM = b^2$.

§ 34.

Перпендикулары изъ фокусовъ Еллипсиса
и

и Иперболы на тангенсы опущенные въ разныхъ почкахъ сихъ кривыхъ линей распутивъ въ Еллипсисѣ болѣе, а въ Иперболѣ менѣе, нежели квадратные корни радіусовъ движенія: въ Еллипсисѣ фиг. 10 треугольники FMH и fHd по причинѣ равныхъ угловъ при тангенсѣ по § 20 пункту 1 и прямыхъ въ M и d подобны такъ, что $FM: FH = fd: fH$ и $FM = \frac{FH \cdot fd}{fH}$. Отсюда $FM^2 = \frac{FM \cdot FH \cdot fd}{fH} = \frac{b^2 \cdot FH}{fH}$

за шѣмъ, что по § 33 $FM \cdot fd = b^2$. По сему называя FM буквою P, а перпендикуляръ для другаго тангенса изъ F же буквою Q, коего радіусы движенія, меньшій есть FH^I а большій fH^I , $P^2: Q^2 = \frac{FH}{fH} : \frac{FH^I}{fH^I}$, или $P: Q =$

$\sqrt{\frac{FH}{fH}}: \sqrt{\frac{FH^I}{fH^I}}$. Точно такимъ же образомъ въ

Иперболѣ фиг: 24 изъ подобныхъ треугольниковъ FHM и fHd, по шѣмъ же причинамъ, какъ и при Еллипсисѣ получимъ точно такую же пропорцію. Разность въ разсужденіи сихъ двухъ кривыхъ линей состоитъ въ томъ, что дробь $\frac{FH}{fH}$ въ Еллипсисѣ при

увеличиваніи FH болѣе увеличивается, нежели какъ, когдабы fH была постоянная величина, ибо $FH + fH = 2a$, а по тому при увеличиваніи FH непременно уменьшается fH, дабы

сумма была $\equiv 2a$, а чрезъ то дробь двоякимъ образомъ увеличивается: т. е. чрезъ увеличеніе числителя и уменьшеніе знаменателя за перьвымъ неминуемо слѣдующее. На противъ сего въ Иперболѣ при увеличеніи FN увеличивается и fN , дабы $fN - FN$ было $\equiv 2a$; слѣдственно дробь менѣе увеличивается, нежели при постоянномъ знаменателѣ; ибо увеличеніе знаменателя уменьшаетъ дробь. Отсюда слѣдуетъ, что въ Еллипсисѣ $P^2: Q^2 > FN: FN^I$, въ Иперболѣ же $P^2: Q^2 < FN: FN^I$ т. е. ежели FN будетъ въ двое больше FN^I , P^2 будетъ превосходить Q^2 больше нежели въ двое въ Еллипсисѣ, менѣе, нежели въ двое въ Иперболѣ. Сіе можно означать крапкою такъ: $P > \sqrt{FN}$ въ Еллипсисѣ, а въ Иперболѣ $P < \sqrt{FN}$, разумѣя подъ знаками $>$ и $<$ превосходство или недостатокъ въ пропорціональности.

§ 35.

Асимптоты.

Прямая линия непрестанно приближающаяся къ кривой и никогда съ нею не сходящаяся, называется ея *асимптотомъ*. Дабы опредѣлить въ сѣченіяхъ коническихъ асимптоты, напередъ должно опредѣлить перпендикулярную къ оси при самомъ верхѣ сѣченія линейку AS

фиг.

фиг. 4. 5. 6. простирающуюся только до тангенса. Поелику Δ ки TAS и TRH подобны между собою; то ТА: AS = TP: PH; Отсюда

$$AS \text{ 1) для Параболы} = \frac{x\sqrt{px}}{2x} = \frac{\sqrt{px}}{2} = \frac{y}{2}, \quad 2)$$

$$\text{для Эллипсиса} = \frac{a}{2a-x} \cdot V\left(\frac{px-pxx}{2a}\right) = \frac{ay}{2a-x} \quad 3)$$

$$\text{для Иперболы} = \frac{a}{2a+x} \cdot \frac{V_{px+pxx}}{2a} = \frac{ay}{2a+x} :$$

§ 36.

Нашедши знаменованія AT и AS, удобно можно проводить касательныя linee, коихъ абсциссы извѣсны, а слѣдовательно и асимптоты. Для сего положивъ въ уравненіи AT, $x = \infty$ за шѣмъ, что разстояніе отъ верху оси, въ коемъ асимптотъ сходится съ кривою есть безконечно велико, выйдетъ 1) для Параболы $AT = \infty$ и слѣд. асимптотъ параболы сходится съ осью въ безконечно великомъ разстояніи отъ верха параболы, или онъ со всѣмъ не возможенъ, 2) Для Эллипсиса

$$AT = \frac{a \infty}{-\infty} = -a, \quad a \quad 3) \text{ Для Иперболы } AT = a.$$

$$\text{Далѣе AS для Эллипсиса} = \frac{a}{-\infty} \cdot \frac{V_{-\infty^2}}{2a} \text{ и слѣ-}$$

довательно не возможенъ. Что же принадле-

жипѣ до Иперболы, то въ ней $AS =$
 $= \frac{a}{\infty} V\left(\frac{p_{\infty}^2}{2a}\right) = \frac{+}{-} V\left(\frac{ap}{2}\right).$

§ 37.

По сему дабы провести асимптотѣ къ Иперболѣ, стоитъ только взять $AT = a$ и $AS = b =$ половинѣ меньшей оси, или изъ центра Иперболы провести линію чрезъ верхъ меньшей полуоси перпендикулярно на концѣ большой оси въ А споящей; то она будетъ асимптотѣ.

§ 38.

Такъ же есѣли въ А возставиѣ меньшую полуось въ низѣ перпендикулярно и чрезъ ее провести изъ центра линію; она будетъ асимптотѣ: ибо $AS = \frac{+}{-} V\left(\frac{ap}{2}\right).$

Само посебѣ видно, что ежели и на другомъ концѣ оси В возставиѣся $AS = V\left(\frac{ap}{2}\right)$, какъ въ верхѣ, такъ и въ низѣ и изъ центра проведущя чрезъ верхи ихъ линіи, то они и будутъ асимптоты. Ибо обѣ отрасли Иперболы совершенно равны между собою такъ, какъ ихъ абсциссы въ равномъ разстояніи отъ центра находящіяся, а слѣдств. и асимптоты имъ соотвѣтствующія.

§ 39.

§ 39.

Линей заключающіяся между асимптомами C_1 и C_2 фиг. 16 и Иперболою, а при томъ параллельныя копюрой нибудь оси или одному изъ асимптоповъ называются ординатами асимптоповъ. Таковы суть KZ , Ky . Nq Kq .

§ 40.

Свойства асимптоповъ Иперболы заключаются въ слѣдующихъ пунктахъ: а) Произведеніе аппликацъ KZ , Kq , кои параллельны меньшей оси MS равно квадрату ея половины $KZ \cdot Kq = CM^2 = b^2$. Въ подобныхъ Δ кахъ, CAT , CPZ $CA: AT = CP: PZ$ или $a: b = a+x$

$\left(\frac{a+x}{a}\right) b = PZ$. Отсюда вычепши $PK = y$, вый-

детъ $KZ = \left(\frac{a+b}{a}\right) b - y$, и какъ $Pq = Pz$ по причинѣ равенства треугольниковъ CPZ , CPq подобныхъ равнымъ Δ мъ CAT , CAx , то Kq

будетъ $= \left(\frac{a+x}{a}\right) b + y$. По сему $KZ \cdot Kq = b^2$.

$\left(\frac{a+x}{a}\right)^2 - y^2$. Но какъ $y^2 = px + \frac{pxx}{2a} = \frac{2b^2x}{a} +$

$\frac{b^2xx}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} (2ax + xx)$: то $KZ \cdot Kq = \frac{b^2}{a^2} ((a+x)^2 -$

$2ax - xx) = b^2$. б) Поелику $KZ = \frac{b^2}{Kq}$ и при

помѣ

томъ Кq становится шѣмъ больше, чѣмъ далѣе она отъ верха Иперболы: то Кz шѣмъ становится меньше и слѣдов. шѣмъ асимптотъ ближе подходитъ къ Иперболѣ.

с) Кz не можетъ никогда быть равна 0. Ибо иначе КZ. Кq и $\frac{b^2}{a^2} \left((a+x)^2 - 2ax - xx \right)$ было

бы равно 0, а слѣдов. $(a+x)^2$ былъ бы равенъ $2ax + xx$, что совершенно не возможно.

И шакъ CZ, хотя отъ часу ближе подходитъ къ Иперболѣ, но никогда съ нею не сходится.

д) Произведеніе аппликаты Ку параллельной асимптоту Cq на свою абсциссу Cy = CO. AC.

Послику SA по причинѣ равенства треугольниковъ ACS и ACX равна и параллельна CX, то она параллельна Ку, а слѣд. уголъ КуZ равенъ AOT

и уголъ KZy = ATO шакъ, что Δ ки KZy и ATO между собою подобны и Ку: KZ = OA: AT

или Ку: OA = KZ: AT = b: Кq (смотри пунктъ а). Далѣе послику треугольникъ Kfq подобенъ ATO по той причинѣ, что Kf

проведена параллельно OT, Кq параллельна AT и Fq параллельна OA; то AT: TO = Кq: Kf, или AT: Кq = TO: Kf = b: Кq. Слѣдо-

вательно Ку: OA = TO: Kf и Ку. Kf = OA. TO. Но какъ Kf = Cy и OA = TO = CO по причинѣ

равенства треугольниковъ OAT съ OCS и OST съ OCA, то yK. Cy = CO², или положивъ

Cy = x, yK = y, CO = c, yx = c².

е) Въ прямоугольномъ треугольникѣ TAS ,
 $AS^2 = a^2 + b^2$, а $OA^2 = OC^2 = \frac{a^2 + b^2}{4} = c^2$. Сія по

самая величина c^2 называется *степенью* Иперболы и всегда равна четверти суммы квадратовъ обѣихъ полуосей.

ф) Какимъ бы образомъ отъ одного асимптома ни проведена была прямая линия rR фиг. 17. чрезъ Иперболу, всегда ея отрѣзки rn и OR равны между собою. Ибо проведши перпендикулярныя къ оси CP лини ZN и VQ чрезъ точки n и O , можно удобно уемотрѣть, что по причинѣ параллельнаго положенія линей Zn и QV треугольники rZn и rQO между собою подобны такъ, что $rn : nZ = rO : oQ$. Такъ же въ подобныхъ треугольникахъ RoV и RnH будетъ $Rn : nH = RO : Ov$. Теперь умноживъ члены обѣихъ пропорцій по порядку такъ, чтобы $rn. Rn : nZ. nH = rO. Ro : Ov. Ov$ и пославивъ вмѣсто $Zn. nH = oQ. Ov$ количество имъ равное (по пункту а) b^2 , получимъ $rn. Rn = ro. Ro$, или $rn (no + Ro) = Ro (rn + no)$, или $rn. no + rn. RO = RO. rn + RO. no$. Отсюда $rn. no = Ro. no$ или $rn = Ro$.

г) Касательная линия mt между асимптомами содержащаяся раздѣляется въ точкѣ прикосновенія d на равныя части md и dt . Ибо сія линия въ одной только точкѣ d касается Иперболы и слѣдовательно раз-

стояніе точекъ пресѣченія n и o (какъ въ пунктѣ f) равно нулю. По сему вмѣсто rn принимать должно md , а вмѣсто OR , dt .
 h) Произведенія линей rn , nR и xr , py заключающихся между асимптомами и параллельныхъ тангенсу mt равны квадрату md или t^2 . Въ треугольникахъ rnZ и XpQ по причинѣ параллельнаго положенія линей xr rn и Qp , Zn подобныхъ, $Zn:Qp = rn:xr$. Такъ же въ треугольникахъ pyu и nHR по вышеозначенной причинѣ подобныхъ $nH:pv = nR:py$. Ежели члены сихъ пропорцій по порядку умножить такъ, чтобы $Zn \cdot nH:Qp \cdot pV = rn \cdot nR:xr \cdot py$ и поставитъ вмѣсто $Zn \cdot nH = Qp \cdot pV$ количество имъ равное (по пункту a) b^2 . то выйдетъ $rn \cdot nR = xr \cdot py$. Еслили же точка n упадетъ на d , или rR сдѣлается касательною линеею въ d , то $xr \cdot py$ будетъ $= md \cdot dt = t^2$.

§ 41.

Діаметры.

Діаметръ параболы есть всякая прямая линейя параллельная оси. Ибо она всѣ линейя параллельныя тангенсу въ точкѣ ея прикосновенія къ Параболѣ раздѣляетъ по поламъ. такъ на пр. FL фиг. 18 параллельная оси Параболы AG раздѣляетъ всякую линейю HM параллельную тангенсу AF къ точкѣ F ,
 въ

въ коей FL касается Параболѣ на двѣ равныя части НК и КМ. Дабы сіе утвердить, должно во первыхъ положивъ $AB = FK = ES = m$, $KL = SG = n$, а абсциссу $CE = x$, аппликату $FE = KS = y$, опредѣлить MG по абсциссѣ CG равной $x + m + n$. По сему $MG^2 = px + pm + pn$, означая буквою p параметръ. Во впорыхъ въ подобныхъ треугольникахъ BKS и BMG изъ пропорціи $BS^2 : SK^2 = BG^2 : GM^2$, или $4x^2 : px = (x + n)^2 : px + pm + pn$. (ибо $BS =$ субтангенсу ACE) опредѣлится $n^2 = 4mx$. Въ третьихъ ежели линеею DS назвать буквою q , а прочія всё оставить при своихъ названіяхъ такъ, что BD будетъ $= 2x - q$, а $CD = x - q + m$ (ибо $AC = x$, а $BC = x - m$); то удобно будетъ усмотрѣть, что $HD^2 = px - pq + pm$, и что въ подобныхъ Δ кахъ BHD и BKS изъ пропорціи $BD^2 : DH^2 = BS^2 : KS^2$ или $(2x - q)^2 : px - pq + pm = 4x^2 : px$, выйдетъ $q^2 = 4mx$. Послѣ сего уже будетъ очевидно, что $DS = SG$, а какъ $DS : GS = HK : KM$; то $HK = KM$.

§ 42.

Послику треугольникъ BKS подобенъ KML такъ, что $BS^2 : KS^2 = KL^2 : ML^2$, или $4x^2 : px = 4mx : ML^2$ и $ML^2 = pm$; KM^2 будетъ $= pm + 4mx = (p + 4x)m = (p + 4x)FK$. Въ семъ то состоитъ *уравненіе для діаметра* Параболы. То есть линеея $KM = \frac{1}{2}HM$ пресѣкаемой діаметромъ

промѣ называется *алликатою діаметра*, а часть его FK между его верхомъ F и аппликатою содержащаяся *абсциссою* и квадратъ аппликаты равенъ абсциссѣ умноженной на сумму параметра оси съ четверною ея абсциссою. Сія сумма называется *параметромъ діаметра*. Можно вывести, что квадратъ сей аппликаты равенъ абсциссѣ умноженной на радіусъ движенія взятый въ четверо. Ибо положивъ радіусъ движенія $= r = x + \frac{1}{4}p$ получимъ $4r = 4x + p$ и $y^2 = 4r \cdot FK$.

§ 43.

Въ Еллипсисѣ діаметръ есть линия отъ одной почки окружности до другой чрезъ центръ проведенная. Ибо сія линия раздѣляетъ по поламъ всякую параллельную тангенсу къ точкѣ ея прикосновенія. Такъ линия NR фиг. 19 есть діаметръ раздѣляющій КР параллельную тангенсу AN по поламъ въ О. Для удобнѣйшаго сея истинны уразумѣнія, назовемъ линии буквами, или положимъ $CE = x$, $CH = a$, $EH = a - x = b$, $NE = y$, $CF = d$, $MQ = g$, $AE = \text{subtg} = \frac{c}{b}$ такъ, что $2ax - xx = c$. Теперь дабы опредѣлить, какъ выше въ Параболѣ, аппликаты PG и KD, должно напередъ найти CD и CG. И такъ въ треугольникахъ NEH и OFH подобныхъ NE:

NE: EN OF: FH или $y: b = d: FH$ и $FH =$

$\frac{bd}{y}$. Такъ же въ треугольникахъ ANE и KOL
 подобныхъ по причинѣ равенства угловъ K и

A, L и E, AE: EN = KL: LO или $\frac{c}{b}: y = KL:$

g и $KL = \frac{cg}{by}$. По сему $DH = KL + FH =$

$$\frac{bd}{y} + \frac{cg}{by} = \frac{b^2d + cg}{by}, \quad CD = \frac{aby - b^2d - cg}{by}, \quad \text{а } Df =$$

$$\frac{aby + b^2d + cg}{by}. \quad \text{Слѣд. } CD \cdot Df = \frac{a^2b^2y^2 - b^4d^2 - 2b^2cdg - c^2g^2}{b^2y^2}.$$

По сему легко уразумѣть, что $KD^2: y^2 =$
 $\frac{a^2b^2y^2 - b^4d^2 - 2b^2cdg - c^2g^2}{b^2y^2}: c$ и $KD^2 = \frac{a^2b^2y^2 -$

$$\frac{b^4d^2 - 2b^2cdg - c^2g^2}{b^2c}. \quad \text{Но какъ } KD^2 = d^2 -$$

$2dg + g^2$; то выходитъ, между сими
 двумя знаменованіями KD^2 уравненіе,
 изъ котораго g^2 выходитъ =

$$\frac{a^2b^2y^2 - b^4d^2 - cb^2d^2}{cb^2 + c^2}. \quad \text{Теперь ежели назовемъ PQ}$$

буквою s и оставивъ всѣ прочія линии при
 своихъ названіяхъ, будемъ искать PS, то
 прежде същемъ, помощію пропорціи, въ по-
 добныхъ треугольникахъ OPQ и NEA, что

$$OQ = \frac{AE \cdot PQ}{NE} = \frac{cs}{by}, \quad SH = FH - OQ = \frac{bd}{y} - \frac{cs}{by},$$

Д

CS =

$$CS = a - \frac{b^2 d + cs}{by}; \quad a \quad Sf = a + \frac{b^2 d - cs}{by}. \quad \text{Слѣдова-}$$

$$\text{тельно} \quad CS \cdot Sf = \frac{a^2 b^2 y^2 - b^4 d^2 + 2b^2 dcs - c^2 s^2}{b^2 y^2} \quad \text{и} \quad y^2:$$

$$c = PS^2 \cdot \frac{a^2 b^2 y^2 - b^4 d^2 + 2b^2 dcs - c^2 s^2}{b^2 y^2}. \quad \text{Отсюда}$$

$$PS^2 = \frac{a^2 b^2 y^2 - b^4 d^2 + 2b^2 dcs - c^2 s^2}{b^2 c}. \quad \text{Но какъ}$$

$PS^2 = d^2 + 2ds + s^2$; то выйдетъ между сими двумя значеніями PS^2 уравненіе, изъ котораго найдется, что s^2 почто тому же равенъ, чему и g^2 . Слѣдов. $s = g$, или $MQ = PQ$; но $MQ: PQ = KO: OP$ Слѣдов. $KO = OP$.

§ 44.

Діаметръ параллельный аппликатѣ другаго называется *сопряженнымъ*. Такъ на пр. FG есть сопряженный діаметръ NR фиг. 20. Еслили изъ конца F сопряженнаго діаметра FG опустить на ось перпендикуляръ FH ; то часть оси DH будетъ средняя пропорціоная между субтангенсомъ и разностію полуоси и абсциссы. Для доказательства сего предложенія должно сдѣлать пропорцію $КС. КЕ: СН. HE = KN^2: HF^2$. По томъ назвши KD букаввою q , получимъ $x = a - q$ и слѣд. субтангенсъ $\frac{2ax - x^2}{a - x}$ будетъ равенъ

равенъ $\frac{a^2 - q^2}{q}$, а для краткости $=t$ такъ ,

что $a^2 = qt + q^2$; такъ же положивъ $DN = u$, выйдемъ $CH. HE = a^2 - u^2 = qt + q^2 - u^2$. Замѣтивъ сіе не трудно понять, что пропорція $СК. КЕ. СН. HE = KN^2. HF^2$ превратится въ слѣдующую: $qt : qt + q^2 - u^2 = y^2 : HF^2$. Откуда

$HF^2 = y^2 \cdot \frac{(qt + q^2 - u^2)}{qt}$. Далѣе въ треугольникахъ

NKA и HDF по причинѣ равенства угловъ A и FDC , K и H , подобныхъ $AK^2 : KN^2 = HD^2 : FH^2$ или $t^2 : y^2 = u^2 : FH^2$. Отсюда $u^2 = t^2$

$\left(\frac{qt + q^2 - u^2}{q}\right)$ и $(q + t) \cdot u^2 = (q + t) qt$, или

$u^2 = qt = СК. КЕ = a^2 - q^2$, или HD есть такъ же средняя пропорціональная между абсциссами $СК. КЕ$.

§ 45.

Поелику квадратъ меньшей оси Еллипсиса равенъ большой оси умноженной на параметръ по 3 му пункту § 9; то въ уравне-

нн $FH^2 = pCH - p \cdot \frac{CH^2}{2a} = \frac{p}{2a} (a^2 - u^2)$, поло-

живъ абсциссу CH равную $a - u$ и поставивъ меньшую ось вмѣсто параметра, получимъ $FH^2 =$

$$\frac{b^2}{a^2} \cdot (a^2 - u^2) = (qt + q^2 - u^2) \frac{b^2}{a^2} = \frac{q^2 b^2}{a^2} \text{ по } § 44$$

(ибо $u^2 = qt$). По сему $FN = \frac{b \cdot q}{a}$, или называя

FN буквою z , $a^2 = bq$. Если изъ центра D опустить на тангенсъ перпендикуляръ Dy и провести FZ параллельную ND; то въ треугольникахъ ADy и HDF по причинѣ равенства угловъ A и D, H и y, подобныхъ, AD:

$$Dy = FD: FN, \text{ или } t+q \text{ равное } \frac{a^2 - q^2}{q} + q =$$

$$\frac{a^2}{q}: yD = FD: z. \text{ Отсюда } yD \cdot FD = \frac{a^2 z}{q} = ab,$$

поставивъ вмѣсто az , bq . И такъ параллелограммъ FDNZ сдѣланный изъ полудіаметровъ равенъ прямоугольнику изъ полуосей.

§ 46.

Чтобъ найти содержаніе между абсциссами и аппликатами діаметровъ въ Еллипсисѣ, такъ какъ нашли въ Параболѣ въ фиг. 20, проведемъ линіи QR, PL и LM, назовемъ DM = n , PL = m , а прочія линіи оставимъ при своихъ названіяхъ. По томъ равенство угловъ PLO и NAK и прямыхъ ORL и AKN дѣластъ треугольники ORL и ANK подобными такъ, что НК:

АК

$AK = OP$: PL или y : $t = OP$: m и $OP = \frac{my}{t}$. Въ подобныхъ треугольникахъ NDK и

LMD , KD : $NK = MD$: ML или q : $y = n$: ML и

$$ML = \frac{ny}{q}. \text{ Отсюда } OQ = ML - OP = \frac{ny}{q} - \frac{my}{t}.$$

Послику $QD = m + n$; то CQ будетъ $= a - m - n$, а $QE = a + m + n$, и $CQ \cdot QE = a^2 - m^2 - 2mn - n^2$. Теперь изъ пропорціи $CQ \cdot QE$: $СК \cdot KE = OQ^2$. KN^2 или $a^2 - m^2 - 2mn - n^2$: $qt =$

$$\left(\frac{ny}{q} - \frac{my}{t} \right)^2 : y^2, \text{ можно сыскать } m^2. \text{ Ибо въ}$$

квадратѣ $\frac{ny}{q} - \frac{my}{t}$ будетъ во всѣхъ членахъ

находишься y^2 такъ, что на y^2 третій и четвертый членъ раздѣлятся и выйдетъ

$$\text{слѣд. уравненіе } \frac{n^2}{q^2} - \frac{2nm + m^2}{qt} = \frac{a^2 - m^2 - 2mn - n^2}{qt},$$

въ коемъ изпробивши $-\frac{2mn}{qt}$ останется

$$\frac{n^2}{q^2} + \frac{m^2}{t^2} = \frac{a^2 - m^2 - n^2}{qt}, \text{ или } \frac{n^2 + q^2 m^2}{t^2} = \frac{a^2 q^2 - m^2 q^2 - n^2 q^2}{qt}$$

$$\frac{n^2 q^2}{t^2}. \text{ Посему } \frac{q^3 m^2}{t} \text{ будетъ } = a^2 q^2 - m^2 q^2 - n^2 q^2 -$$

$$q t n^2 = \frac{q^4 m^2}{t q}. \text{ Теперь поставивъ вмѣсто } qt$$

$a^2 - q^2$, выйдетъ $q^4 m^2 = (a^2 - q^2) (a^2 q^2 - m^2 q^2 - a^2 n^2)$. Отсюда сдѣлавъ умноженіе и изъсрбниъ съ обѣихъ сторонъ равныя количества удобно найти, что $m^2 = a^2 + n^2 - q^2 - \frac{a^2 n^2}{q^2}$. Еслили по-

ложимъ $ND = 1$, $FD = r$; то изъ подобныхъ треугольниковъ NKD и LMD получимъ, KD :

$ND = MD : LD$ или $q : 1 = n : LD$ и $LD = \frac{1n}{q}$. По сему

$NL = 1 - \frac{1n}{q}$; $LR = 1 + \frac{1n}{q}$, а $NL \cdot LR = 1^2 - \frac{1^2 n^2}{q^2}$.

Ежели $NL \cdot LR$ умножить на $a^2 - q^2$, а найденную величину m^2 на 1^2 ; то выйдутъ равныя произведенія такъ, что $NL \cdot LR \cdot ND^2$ будетъ равно $PL^2 \cdot ND^2$ и $PL^2 \cdot ND^2 = NL \cdot LR \cdot ND^2$. Но какъ по причинѣ подобія треугольниковъ PLO , HDF въ коихъ уголъ $PLO = HDF$ (за тѣмъ, что $NLO = NDF$, а $NLP = NDH$) $PL^2 : HD^2 = OL^2 : FD^2 = NL : LR : ND^2$ и $OL^2 =$

$\frac{NL \cdot LR \cdot r^2}{1^2}$. И такъ квадраты аппликашъ

LO содержишя къ квадрату полудіаметра сопряженнаго FD , какъ произведеніе отрезковъ NL , LR , простаго діаметра къ квадрату его половины ND . Для крайности положивъ

$OL = y$, $NL = x$, выйдетъ $y^2 = \left(\frac{21x - x^2}{1} \right) r^2$

$$r^2 = \frac{2r^2 x}{1} - \frac{r^2 \cdot x^2}{1^2} = sx - \frac{sx^2}{2l}, \text{ называя вели-}$$

чину $\frac{2r^2}{1}$ буквою s . Отсюда видно, что со-

держаніе аппликантъ и абсциссъ при діаметрѣ то же, что и при оси, только параметръ есть третья пропорціональная къ сопряженному діаметру и простому. Зная сіе не трудно понять, что при одинакихъ

діаметрахъ величина $\frac{r^2}{l^2}$ есть постоянная,

и что квадраты аппликантъ содержатся, какъ произведенія отрѣзковъ діаметра.

§ 47.

Діаметръ Иперболы есть линия проходящая чрезъ центръ отъ одной отрасли Иперболы до другой. Такъ на пр. NR фиг. 26 есть діаметръ раздѣляющій каждую линию КР параллельную тангенсу AN по поламъ. Дабы избѣжать скучнаго разысканія всѣхъ линей нужныхъ для доказательства сея истинны, назвалъ я въ фигурѣ 26 всѣ линии тѣми же почто буквами, каковыми и въ Еллипсисѣ фиг. 19 онѣ названы, такъ, что каждому уразумѣвшему сказанное въ парагр. 43 самому собою вывести можно для Иперболы то же, что выведено для Еллипсиса.

Разность только будетъ въ томъ, что гдѣ при Эллипсисѣ стоишь—, тамъ въ Иперболѣ будетъ + такъ напр. FH въ Иперболѣ бу-

детъ $= \frac{bd}{y}$ и $KL = \frac{cg}{by}$. Но DH не будетъ

$= KL + FH$, а будетъ $= FH - KL$ и т. д. какъ то удобно понять изъ фиг. прилагая къ ней все сказанное въ 43 параграфѣ и не за-

бывая того, что въ Иперболѣ $y^2 = px + \frac{p^2 x^2}{2a}$,

субтангенсъ $\frac{2ax + x^2}{a + x}$ и содержанія аппликашъ.

§ 48.

Въ Иперболѣ сопряженный діаметръ есть линия такъ же параллельная тангенсу въ точкѣ прикосновенія другаго діаметра, проходящая чрезъ центръ Иперболы и опредѣляемая съ обѣихъ сторонъ проведенными изъ точки прикосновенія параллельными обѣимъ асимптошамъ линиями. Такъ въ фиг. 21 hN есть сопряженный діаметръ діаметра dD . Ибо hN параллельна тангенсу LP и ограничена линиями Dl и Dh параллельными асимптошамъ CP и CQ . Параллелограммъ сопряженныхъ діаметровъ равенъ прямоугольнику осей. Истинну сего удобно понять, представивъ себѣ, что фиг. 21 $СК = АК$ и $Сн = dD = СК$ $АК$ по пункту д § 40 и слѣдов. $СК:$

Сн

$Cu = uD$: АК. Почему равные углы К и u (по причинѣ параллельныхъ АК и uD, кои обѣ параллельны асимптоту CQ) въ треугольникахъ САК, cuD, заключаются между боками, коихъ произведенія равны между собою. Но ежели изъ А и D опустить перпендикуляры АТ и Dt на асимптотѣ СР, треугольники ТАК и tDu будутъ имѣть кромѣ прямыхъ въ Т и t, еще равные вышеупомянутые К и u, а по сему будутъ подобны такъ, что $uD : AK = Dt : AT$. И такъ $Dt : AT = CK : Cu$ и $Dt : Cu = AT : CK$. По сей причинѣ треугольникъ САК = треуг. Cud = CDt. Отсюда въ двое большій САК тр. CAy = въ двое большему CDt тр. CDL (ибо Cf : fL = DP : LD, а LD = DP по пункту g § 40. По чему Cf = fL). Изъ сего явно слѣдуетъ, что $XCAy = 2CAy = CHDL = 2CDL$, или ректангулъ полуосей равенъ параллелограмму полудіаметровъ. Сл. и прямоугольникъ изъ осей всегда равенъ параллелограмму изъ діаметровъ.

§ 49.

Въ заключеніе сей статьи о діаметрахъ замѣнить можно, что каждый діаметръ какъ въ Эллипсисѣ, такъ и въ Иперболѣ параллельный тангенсу разсѣкаетъ больший радіусъ движенія къ точкѣ прикосновенія проведенный такъ, что часть его между

почкою прикосновенія и пресѣченія равна
 бываетъ полуоси. Такъ въ фигурѣ 22 діа-
 метръ Нн параллельный ТМ пресѣкаетъ Мѣ
 такъ, что $DM = a$. Доказ. естли изъ F
 проведемъ FP параллельную съ ТМ, получимъ
 чрезъ сіе треугольникъ FMP равнобедренный
 за тѣмъ, что углы радіусовъ движенія съ
 тангенсомъ равны по § 20, а по сему и ле-
 жашіе на крестѣ MFP и MPF равны между
 собою такъ, что $MF = MP$. Но какъ изъ
 подобія треугольниковъ FPF, CDF выходящъ
 пропорція $Ff: cf = fP: fD$ показующая, что
 $fP = 2fD$, или $fD = DP$, ибо $Ff = 2cf$ по § 14.
 И такъ по свойству Еллипсиса положивъ
 $FM + fM$, или $FM + MP + 2PD$, или $2FM + 2PD$
 равнымъ $2a$, найдемъ, что $PM + PD = a$.
 Такъ же въ Иперболѣ фиг. 23 положивъ
 $fM - FM =$ или $2PD - 2FM$ равнымъ $2a$, оп-
 кроемъ шотъ часъ, что $PD - FM = DM = a$.

§ 50.

Радіусы кривизны.

Кругъ проходящій чрезъ какую нибудь
 точку r кривой лини, имѣющій съ нею въ сей
 точкѣ одну касательную и центръ на линіѣ
 r перпендикулярной къ сей касательной
 такъ, что изъ сего центра большимъ ра-
 діу-

дѣломъ нежели gr описанный кругъ пройдеиъ выше безмѣрно малой дуги около точки r находящейся, а меньшимъ описанный ниже, называется *кругомъ прикосновения*, а радіусъ его *радіусомъ кривизны*. Для великаго употребленія въ разныхъ случаяхъ сего круга, нужно оный разобратъ.

§ 51.

Для краткости положимъ діаметръ rg (фиг. 25) $= 2g$, сопряженный $hN = 2h$, радіусъ движенія $fr = r$ радіусъ кривизны $tn = m$, перпендикуляръ rq изъ точки прикосновения на діаметръ $hN = q$, перпендикуляръ ft изъ фокуса на тангенсъ $= t$, аппликашу круга $lz = lx = lu$ (по причинѣ безмѣрно малой разности производящей отъ безмѣрной малости дуги lr) $= y$. При сихъ наименованіяхъ $m = \frac{h^2}{q}$ какъ въ Еллипсисѣ, такъ и въ Иперболѣ.

Доказ. Подобные треугольники rxz , rCq (по причинѣ параллельнаго положенія линей hN и lo , изъ коихъ послѣдняя есть ордината круга, перпендикулярна къ tn и параллельна tT и hN) даютъ пропорцію $rx : rz = rC : rq$, или называя rx буквою x , $x : rz = g : q$ Отсюда

$rz = \frac{qx}{g}$. Но какъ x по свойству круга $=$

$$\frac{1z^2}{2m-x} = \frac{y^2}{2m} \text{ (ибо } x \text{ безмѣрно мало въ сравненіи}$$

$$\text{съ } 2m); \text{ по } \frac{qx}{g} = \frac{y^2}{2m} \text{ и } m = \frac{gy^2}{2qx}. \text{ Поселику}$$

же извѣстно изъ фиг. § 46 и 47, что $y^2: 2gx \pm xx = h^2: g^2$, гдѣ xx предъ $2gx$ можетъ быть почтенъ за ничто, ибо x^2 есть безконечная малость второй степени смот. § 8

$$\text{калк. И такъ } y^2: 2gx = h^2: g^2 \text{ и } y^2 = 2g \frac{xh^2}{g^2}$$

$$\text{такъ, что } m = \frac{gy^2}{2qx} = \frac{h^2}{q}. \text{ Отсюда слѣдуетъ}$$

1) что поселику hq есть параллелограммъ сопряженныхъ полудіаметровъ (ибо rq есть перпендикуляръ изъ r на hN , а параллелограммъ полудіаметровъ по § 45 $= a \cdot b$; то $h^2 = \frac{a^2 b^2}{q^2}$ и $m = \frac{a^2 \cdot b^2}{q}$. 2) Что по причинѣ подобія

треугольниковъ tfr и rdq , въ коихъ t и q прямые, а d и trf на крестѣ, $rq: rd = ft: fr$ или $q: a = t: r$, поставляя вмѣсто rd по § 49

$$a, \text{ и } q = \frac{at}{r}, q^3 = \frac{a^3 t^3}{r^3}, \text{ а } m = \frac{r^3 b^2}{at^3} = \frac{r^3 p}{2t^3}$$

$$\text{за тѣмъ, что параметръ } p = \frac{2b^2}{a}, \text{ а } \frac{p}{2} = \frac{b^2}{a}.$$

3) Что сжеля изъ центра C Еллипсиса фиг.

27 или Иперболы фиг. 28 опустить перпендикуляръ Cn на тангенсъ и провести нормальную $гЕ$, треугольники CnT и $гЕР$ въ n и P прямоугольные и имѣющіе углы E и T равные (послику въ Еллипсисѣ каждый изъ нихъ есть уголъ дополненія до 90° къ углу t , а въ Иперболѣ одинъ уголъ дополненія къ углу Ctn , а другой къ равному ему углу $гЕ$) даютъ пропорцію $Cn: CT = гР: гЕ$ или $гq$ (ибо $гq$ параллельная Cn между параллельными nr , Cq равна Cn): $CT = Cр: гЕ$ и $гq$. $гЕ = CT$. $Cр$; но CT . $Cр = b^2$, ибо Pt по §

$$25 = \frac{2ax + xx}{a + x} : Ct = a + at \quad \frac{ax}{a+x} + a = \frac{a^2}{a+x} =$$

$$y: CT \text{ и } CT = \frac{a^2 y}{2ax + x^2} \text{ а } CT. Cр = \frac{a^2 y^2}{2ax + xx} =$$

$$\frac{a^2 b^2}{a^2} \left(\frac{2ax + xx}{2ax + xx} \right) = b^2. \text{ Отсюда } гq. гЕ = b^2 \text{ и}$$

$$q = \frac{b^2}{гЕ} = \frac{b^2}{M}, \text{ полагая } гЕ = M, \text{ а } q^3 = \frac{b^6}{M^3};$$

$$\text{слѣдов. } m = \frac{a^2 b^2}{q^3} = \frac{a^2 M^3}{b^4}.$$

§ 52.

Въ Параболѣ $m = \frac{p}{2} \cdot \frac{r^3}{t^3}$. Въ самомъ дѣлѣ
треугольникъ $гхи$ фиг. 30 равнобедренный по
причинѣ

причинѣ равенства угловъ $x \equiv mrx$ и $u \equiv urM$.
 Слѣдств. $rx \equiv ru$ Поелику ru подобенъ rt для
 равенства прямыхъ угловъ t и z и на крестѣ
 лежащихъ zur и rt такъ, что $ru: rz \equiv rt:$
 ft или $x: \frac{y^2}{2m} = r: t$. Отсюда $m \equiv \frac{ry^2}{2tx}$: но

какъ y^2 по § 42 $= x \cdot 4r, \frac{p}{4} \cdot r = t^2$; то $m =$

$$\frac{4r^2x}{2tx} = \frac{2r^2}{t} = \frac{pr^3}{2t^3}.$$

§ 53.

Изъ всего сказаннаго видно, 1) что ра-
 діусы кривизны въ разныхъ точкахъ Пара-
 болы содержатся какъ квадраты радіусовъ
 движенія раздѣленные на перпендикуляры
 изъ фокусовъ на тангенсъ опущенные, или
 какъ кубы оныхъ радіусовъ раздѣленные на
 кубы оныхъ перпендикуляровъ; ибо $\frac{p}{2}$ есть
 количество постоянное. 2) Что въ Эллипсѣ
 и Гиперболѣ такъ же радіусы кривизны со-
 держатся, какъ кубы радіусовъ движенія раз-
 дѣленные на кубы перпендикуляровъ изъ фо-
 куса на тангенсы опущенныхъ, какъ то
 видно изъ пункта 2 § 51.

§ 54.

*П л о щ а д и к р и в о л и н е й н ы х ъ
п р о с т р а н с т в ъ.*

Къ нахожденію площадей кривыми линиями окружающихъ, такъ какъ и толстоты тѣлѣ отъ кругообращенія какихъ нибудь фигуръ производящихъ, поверхности сихъ тѣлѣ и спрямленію кривыхъ линей употребимъ мы дифференціальное и интегральное вычисленіе, которое тѣмъ къ сему способнѣе, что оно одно даетъ общее правило для всѣхъ кривыхъ линей. И такъ начнемъ о площадяхъ. Если-ли ф. и. представляешь какую нибудь кривую линию, которой ось падаетъ на линию АК, АР абсцисса, НР и РМ равныя аппликации, а линия DLN въ безмѣрно маломъ разстояніи отъ НРМ такъ, что $PL = dx$, а $DR = NO = dy$; то не трудно понять, что площадь трапеція НDMN бесконечно мало разнится отъ площади прямоугольника НRМО, или разнится площадью треугольниковъ НDR и MON, кои суть $\frac{dx \cdot dy}{2} + \frac{dx \cdot dy}{2} = dx \cdot dy$ = бесконечной малости умноженной на бесконечную же малость. Смотри. § 8 калькул. По сему $= 2ydx$ и можетъ почестъя бесконечно

нечно малымъ приращеніемъ криволинейнаго пространства, или его дифференціаломъ. И такъ сіе пространство $= \int y dx$, гдѣ стоитъ только вмѣсто y и x подставить изъ уравненія каждой кривой линіи имъ равное, взять его интегралъ, а по томъ, смотря по величинѣ и положенію x будетъ увеличиваться площадь, коея $y dx$ есть дифференціалъ такъ, что можно находить цѣлую площадь криволинейную, естли не безконечна.

§ 55.

Въ Параболѣ $y^2 = px$, $y = \sqrt{px}$, $y dx = 2 dx \sqrt{px}$. И такъ остается взять интегралъ отъ $2 dx \sqrt{px}$. Для сего по § 14 ученія о интегральномъ вычисленіи превративъ корень въ степень, будетъ $2 dx \sqrt{px} = 2 p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$, далѣе по уничтоженіи dx , прибавленіи къ показателю степени переменнаго количества x единицы и раздѣленіи на сію сумму выйдетъ $S x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x \sqrt{x}$, а $2 p^{\frac{1}{2}}$ количество постоянное стоитъ только умноживъ на найденный интегралъ, чтобъ получить $S 2 dx \sqrt{px} = S 2 p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx = 2 p^{\frac{1}{2}} S x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{4}{3} x \sqrt{px} = \frac{4}{3} xy = \frac{2}{3} x \cdot 2y$. Изъ сего видно, что каждый отръзокъ Параболы НАМ, большій его или меньшій, смотря по величинѣ x , равенъ $\frac{2}{3}$ прямоугольника, коего основаніе $= x$, а высота $= 2y$.

§ 56.

На семъ утверждаясь легко найти площадь Параболическаго вырѣзка уНХМ ф. II между двумя ординатами уХ, НМ содержащагося, въ коемъ U , Нр и U р извѣстны. Для сего должно сдѣлать пропорцію $Нр^2: уU^2 = АР: АУ$ по пункту 1 § 7, а изъ ней другую $Нр^2 - уV^2: уU^2 = АР - АВ = VР АВ$. Отсюда АВ, а слѣдовательно и АР сыщется. И такъ $\frac{2}{3} АР. 2Нр - \frac{2}{3} АВ. 2уU = \frac{4}{3} (АР.Нр - АВ. уU) =$ вырѣзку уНХМ.

§ 57.

Въ Кругѣ, Еллипсисѣ и Иперболѣ изъ дифференціала $2ydx$ совершеннаго интеграла найти не возможно, а приближаться къ нему должно посредствомъ безконечной строки. Такъ на пр. въ уравненіи для круга, которое извѣстно изъ простой геометріи и состоящъ въ томъ, что всегда квадратъ перпендикуляра опъ окружности на діаметръ опущеннаго равенъ произведенію опрѣзковъ діаметра, или $y^2 = aa - xx$, полагая діаметръ $2a$, абсциссу $= a - x$; $y = \sqrt{aa - xx}$, $2ydx = 2dx \sqrt{aa - xx}$, а $2fydx = 2fdx \sqrt{aa - xx}$.

§ 58.

Въ Еллипсисѣ, принимая вмѣсто параметра $\frac{2b^2}{a}$ и называя абсциссу $a - x$, или линею

РС фиг. 5 буквою x , $y^2 = \frac{b^2}{a^2} (aa - xx)$, $y = \frac{b}{a}$

$$V_{aa-xx}, 2ydx = 2dx \cdot \frac{b}{a} V_{aa-xx}, \text{ а } 2fydx =$$

$$\frac{2b}{a} Sdx V(aa-xx). \text{ Сіе показываетъ 1) что при}$$

одной абсциссѣ на Y $AP = x$ фиг. 5 площадь
 Эллиптическаго сегмента HAZ содержится
 къ площади сегмента круга, которой ради-
 усомъ $AC = a$ описанъ изъ C и коего хорда
 есть продолженная въ верхъ и въ низъ HZ ,

какъ $\frac{b}{a} : 1 = b : a$. 2) что для сысканія на-

стоящаго интеграла отъ $dx \sqrt{aa-xx}$ должно
 $V(aa-xx)$ разрѣшить въ бесконечную
 спрочу помощію Невпонова правила. По
 сему въ формулѣ $(a-b)^n = a^n - n \cdot a^{n-1}b + n$
 $\left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot a^{n-4}b^2 - n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot a^{n-3}b^3 + n \cdot \frac{n-1}{2}$

$\frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4} \cdot a^{n-4}b^4$ и проч. поставивъ вмѣ-

сто a , a^2 , вмѣсто b , x^2 , вмѣсто n , $\frac{1}{2}$ полу-

чимъ $(aa-xx)^{\frac{1}{2}} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$

Сей рядъ умноживъ на dx , должно взять
 интеграль.

интеграль. И такъ $\int (ax - \frac{x^2 dx}{2a} - \frac{x^4 dx}{8a^3} - \frac{x^6 dx}{16a^5} - \frac{5x^8 dx}{128a^7}) = ax^2 - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \frac{x^7}{112a^5} - \frac{x^9}{1152a^7}.$

Сей интеграль для круга должно умножить только на 2, а для Эллипсиса на $\frac{2b}{a}$. Дабы

полукруга или полъеллипсиса получить площадь, надобно положить $x=a$ (ибо въ полукружїи и полъеллипсисѣ, считая абсциссы отъ центра, или полагая абсциссу равною $a-x$, x неминусо $= a$, абсцисса же $= 0$) $= 1$.

По сему площадь полукруга $= \left(a^2 - \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{40} - \frac{a^2}{112} - \frac{a^2}{1152} \right) = 2 \left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{1}{1152} \right)$ а цѣлаго

круга площадь $= 2 \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{20} - \frac{1}{56} - \frac{1}{316} \right)$:
 площадь же полуеллипсиса равна площади полукруга умноженной на $\frac{b}{a}$. Такъ же и весь

Эллипсисъ равенъ кругу большею полуосью описанному умн. на $\frac{b}{a}$. Отъ сюда слѣдуетъ, что

Эллипсисъ содержится къ кругу большею полуосью описанному какъ b къ a . 3) Что Эллипсисъ равенъ такому кругу, коего діаметръ есть средняя пропорціональная линия между его осями. Доказ. Положивъ площадь Эллипсиса $= c$, площадь круга описаннаго большею полу-

осью $= d$, выйдетъ с: $d = b: a$ по 2 пункт. сего § ; но площади круговъ содержащяся какъ квадраты діаметровъ. Слѣд. назвавъ діаметръ круга равнаго Еллипсису буквою z , получимъ $d: c = a^2: z^2$, отсюда $z^2 = \frac{a^2 \cdot c}{d} = \frac{a^2 b d}{a d} = ab$. 4) Что Еллипсисъ содержится къ кругу описанному меньшею полуосью, какъ $a: b$. Ибо положивъ площадь сего круга $= v$ видно будетъ, что $d: v = ab: b^2$, ибо діаметръ круга d по 3 пункт. $= \sqrt{ab}$.

§ 59.

Площадь Иперболы шѣмъ только разнилася отъ площади Еллипсиса, что вездѣ вмѣстывыйдетъ $+$. Въ прочемъ безконечная строка входящая въ изображеніе площади круга Еллипсиса и Иперболы ясно показываетъ, что до совершенной квадратуры всѣхъ сихъ прехъ криволинейныхъ пространствъ достигнуть не можно, а только приближаться къ ней по произволению находится способъ.

§ 60.

Толстота тѣлъ отъ обращенія всякихъ фигуръ около одного бока произходящихъ.

Есшли представить, что въ фиг. II.
пра-

трапецій NRPL обращается около PL; то произойдетъ урѣзанный конусъ безмѣрно мало разнящійся отъ цилиндра, который происходитъ отъ обращенія прямоугольника NRPL около PL. Ипакъ онаго конуса тол-

стота = толстотѣ сего цилиндра = $\frac{\pi y^2 dx}{2}$

за тѣмъ, что полагая содержаніе радіуса къ окружности равнымъ 1: π , выходящѣ площ-

щадь круга описуемаго линеею NR = $\frac{\pi y^2}{2}$. По

сему принявъ $\frac{\pi y^2 dx}{2}$ за дифференціалъ тѣла

произойти долженствующаго отъ обращенія NAR около AR, легко примѣнить, что

$\frac{\pi}{2} \int y^2 dx =$ тѣлу отъ обращенія NAR. Ипакъ

полагая вмѣсто y и x изъ уравненія каждой кривой линии имѣ равное, получаютъ удобно толстоту разныхъ тѣлъ отъ обращенія плоскостей около одной стороны произходящихъ.

§ 61.

Отъ обращенія параболическаго сегмента NRA около AR произходящее тѣло называется *коноидомъ параболическимъ*. Толстота его удобно сыщется слѣд. образомъ:

y^2 въ Параболѣ $= px$, $y^2 dx = p x dx$, $\int y^2 dx = \frac{px^2}{2} = \frac{y^2 \cdot x}{2}$, а $\frac{\pi}{2} \cdot \int y^2 dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{y^2 x}{2}$ т. е. толсто́та

коноида отъ НАР произходящаго $= \frac{1}{2}$ цилиндра, коего радіусъ основанія $= y$, а высота x .

§ 62.

Чтобъ найти толсто́ту урѣзаннаго параболическаго коноида произходящаго отъ обращенія трапеціи НУР около УР, должно по § 56 найти по даннымъ НР, уУ и УР, АР и АВ; по томъ толсто́ту АУМ и АНХ и первую изъ вѣпорой вычестъ. Но какъ $AV = \frac{VR \cdot Vy^2}{HR^2 - Vy^2}$, а $AR = \frac{VR \cdot HR^2}{HR^2 - Vy^2}$; то толсто́та

меньшаго коноида АУх будетъ $= \frac{\pi VR \cdot Vy^4}{4(HR^2 - Vy^2)}$;

а большаго толсто́та $= \frac{\pi VR \cdot HR^4}{4(HR^2 - Vy^2)}$, раз-

ность же ихъ $= \frac{\pi \cdot V R}{4(HR^2 - Vy^2)} (HR^4 - Vy^4) = \frac{\pi}{4} \cdot$

$VR (HR^2 + Vy^2)$ (разрѣшая $HR^4 - Vy^4$ на два множителя $HR^2 + Vy^2$ и $HR^2 - Vy^2$) $=$ толсто́тъ вырѣзка НУМ. То есть для нахождения ся, между площадью большаго круга $\frac{\pi}{2} \cdot HR^2$ и площадью меньшаго $\frac{\pi}{2} Vy^2$ берутъ

сред-

среднюю арифметическую пропорциональную $\pi \left(\frac{HP^2 + Vy^2}{4} \right)$ и умножаятъ на высоту вырѣзка VP . Такимъ образомъ предписываютъ нѣкоторые Геометры находить полстоу бочекъ; но сіе правило тѣмъ ближе подходитъ къ правдѣ, чѣмъ фигура бочки сходнѣе съ параболическимъ коноидомъ. Въ прочемъ вырѣзокъ $уНХМ$ довольно сходствуеши съ половиною большей части бочекъ.

§ 63.

Толстога шара сыщется слѣдующимъ образомъ: $y^2 = 2ax - x^2$. По сему $\frac{\pi}{2} \int y^2 dx = \frac{\pi}{2} \int (2ax dx - x^2 dx) = \frac{\pi}{2} \left(ax^2 - \frac{x^3}{3} \right)$. По сей формулѣ какъ для каждаго сегмента шара сыщется толстога, опредѣляя x , такъ и для цѣлаго полушарія, полагая $x = a$, такъ, что полушаріе $= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{3} a^3 = \frac{\pi}{3} a^3$, а цѣлаго шара толстога $= \frac{2}{3} \pi a^3$.

§ 64.

Толстога тѣла произходящаго отъ обращенія полуэллипсиса около какой нибудь оси и называемаго *сфероидомъ* или *тѣломъ шаровиднымъ*, находится такъ же, какъ

толсто́та шара. $y^2 = \frac{b^2}{a^2} (2ax - x^2)$. И такъ

$$\frac{\pi}{2} Sy^2 \cdot dx = \frac{\pi b^2}{2a^2} (2ax dx - x^2 dx) = \frac{\pi b^2}{2a^2} \left(ax^2 - \frac{x^3}{3} \right).$$

Сія формула показываетъ толсто́ту сегмента, сфероида, и полусфероида полагая вмѣсто x , a . И такъ полусфероидъ =

$$\frac{\pi b^2}{2a^2} \cdot \frac{2a^3}{3} = \frac{\pi}{3} ab^2, \text{ а сфероидъ} = \frac{2}{3} \pi ab^2 \text{ т. е.}$$

равенъ $\frac{2}{3}$ цилиндра, коего діаметръ основанія меньшая ось, а высота большая. По сему 1)

Сфероидъ содержи́тся къ шару, коего діаметръ равенъ большой оси, какъ $ab^2 : a^3$ или какъ $b^2 : a^2$. 2)

Сфероидъ равенъ такому шару, котораго полудіаметръ есть вторая изъ двухъ

среднихъ пропорціональныхъ геометрическихъ линей между a и b . Ибо полагая

толсто́ту шара имѣющаго полудіаметромъ большую полуось = d , толсто́ту сфероида =

c , діаметръ равнаго сфероиду шара = z ,

найдемъ, что $d : c = a^3 : z^3$ и $z^3 = \frac{c \cdot a^3}{d}$; но

$$c : d = b^2 : a^2, \text{ или } c = \frac{b^2 d}{a^2} \text{ По сему } z^3 = \frac{a^3 b^2 d}{a^2 d}$$

= ab^2 . 3) Сфероидъ содержи́тся къ шару, коего діаметръ = меньшей оси, какъ $a : b$.

Ибо называя толсто́ту сего шара буквою g
по-

получимъ $d: g = a^3: b^3$, но $d = \frac{a^2 c}{b^2}$; и такъ $g =$

$$\frac{a^2 c b^3}{b^2 a^3} = \frac{c b}{a} \text{ и } c: g = a: b.$$

§ 65

Толстоша Иперболическаго коноида =

$$\frac{\pi b^2}{2a^2} \cdot \int (2ax + x^2) dx = \frac{\pi b^2}{2a^2} \cdot \left(ax^2 + \frac{x^3}{3} \right) = \frac{\pi b^2}{2a^2} \left(a^3 + \frac{a^3}{3} \right), \text{ полагая высоту коноида} = a. \text{ Сіе}$$

показываетъ, что въ семъ случаѣ Иперболическій коноидъ = $\frac{4}{3} \cdot \frac{\pi \cdot ab^2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \pi ab^2$ т. е. = $\frac{2}{3}$ цилиндра, коего радіусъ основанія есть половина меньшей оси, а высота = цѣлой большой оси.

§ 66.

*Наружная поверхность тѣлъ отъ круго-
обращенія плоскостей производящихъ.*

Когда трапецій HDPL фиг. II. обращаясь около PL производитъ урѣзанный конусъ; тогда HD движеніемъ своимъ производитъ его поверхность такъ, что она равна окружности круга описаннаго радіусомъ HP или DL (ибо они безмѣрно близки) умноженной на HD. Но какъ $HD = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, при-

нимая треугольникъ HDR за прямолинейный, ибо HD по безмѣрной малости отъ прямой линии почти не разнится, а окружность круга, коего радіусъ есть y , $= \pi y$; по наружной поверхности каждаго тѣла отъ кругообращенія криволинейной фигуры производящаго дифференціалъ будетъ равенъ $\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2}$, а самая поверхность $= \pi \int y \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

§ 67.

Поелику въ Параболѣ $y^2 = px$ и $2ydy = p dx$;

$$\text{то } dx = \frac{2ydy}{p}, \quad dx^2 = \frac{4y^2 dy^2}{p^2}, \quad \text{а } y \sqrt{dx^2 + dy^2} = y \sqrt{\frac{4y^2 dy^2}{p^2} + dy^2} = \frac{ydy}{p} \sqrt{4y^2 + p^2} = \frac{ydy}{p} (4y^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Сего количества интегралъ взять удобно по § 14 калк. слѣд. образомъ: приложивъ къ $\frac{1}{2}$ единицу, сумму сію умноживъ на дифференціалъ стоящихъ подъ корнемъ количествъ раздѣлить надлежитъ на сіе произведеніе данный дифференціалъ. И такъ $\frac{\int ydy}{p} (4y^2 + p^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{12} p$

$(4y^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}$. Дабы узнать, не должно ли къ сему интегралу приложитъ поспояннаго количества, или отъ него отнять, надобно переменную величину въ сысканномъ интегралѣ положить равною нулю,

нулю, и ежели послѣ сего что нибудь изъ интеграла останется, то сѣ будетъ лишняя постоянная величина, которую должно изъ интеграла опнять; ежели же выйдетъ въ интегралъ— или остатокъ отрицательный, должно сный принять за постоянную величину съ $+$. И такъ положивъ $y = 0$ надлежало бы интегралу быть равнымъ 0, ибо когда аппликаша въ Параболѣ $= 0$, тогда и наружная поверхность коноида должна быть равна 0; но интегралъ выйдетъ $= + \frac{p^2}{12}$. Слѣдов. настоящий интегралъ будетъ $=$

$$\frac{(4y^2 + p^2)(4y^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}}{12p} - \frac{p^2}{12} \text{ и умноживши на } \pi =$$

$$\frac{\pi}{12p} (4y^2 + p^2)(4y^2 + p^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{p^2}{12} \pi. \text{ Въ прежнихъ}$$

случаяхъ, въ которыхъ мы брали интегралы, для того не упоминаемо было о постоянныхъ величинахъ, что въ нихъ поставляя перемѣнное количество равнымъ 0, интегралъ выходитъ равнымъ нулю, какъ то всякому примѣтивъ удобно.

§ 68.

Наружность шара сыскивается такъ: $y^2 = 2ax - xx$, а $y dy = adx - xdx$. По сему $dy^2 =$
($2 - x$)

$$\frac{(a-x)^2 dx^2}{y^2}; \quad dy^2 + dx^2 = \frac{dx^2(a^2 - 2ax + xx + 2ax - xx)}{y^2} =$$

$$\frac{a^2 dx^2}{y^2}, \quad a \sqrt{dy^2 + dx^2} = \frac{adx}{y}. \quad \text{Умноживъ сѣ коли-}$$

ченство на πy , выйдетъ $\pi S_y \sqrt{dy^2 + dx^2} = \pi ax$, гдѣ положивъ $x = 2a$, получится поверхность всего шара $= 2\pi a^2$.

§ 69.

Спрявленіе кривыхъ линий.

Интегральное вычисленіе можетъ быть употреблено съ великою пользою въ спрявленіи кривыхъ линий, или справедливѣе сказать, въ способъ, какъ кривой линии содержаніе къ прямой, сколько можно ближе и точнѣе, можно означать. Для сего должно безмѣрно малую дугу HD фиг. II представить дифференціаломъ дуги AN и найдши свойство первой изъ уравненія кривой линии, доходить до AN чрезъ интегральное вычисленіе, или находя интегралъ онаго дифференціала; но $HD = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. И такъ должно сыскивать $\int \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

§ 70.

Въ Параболѣ $y^2 = px$, $dx = \frac{2y dy}{p}$, $dx^2 = \frac{4y^2 \cdot dy^2}{p^2}$, $dx^2 +$
 dy^2

$$dy^2 = \frac{4y^2 dy^2}{p^2} + dy^2 = \frac{dy^2}{p^2} (4y^2 + p^2), \text{ а } \sqrt{dx^2 + dy^2} =$$

$\frac{dy}{p} \sqrt{4y^2 + p^2}$. И такъ дабы найти сего количества интегралъ, должно по Невтонову биномію $(4y^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}$ превратить въ бесконечную строку, которая и будетъ: $p + \frac{2y^2}{p} - \frac{2y^4}{p^3} + \frac{4y^6}{p^5} - \frac{10y^8}{p^7}$ и ш. д. какъ то видно

изъ § 58 пунк. 2. Умноживъ на $\frac{dy}{p}$ сію стро-

ку получимъ другую: $dy + \frac{2y^2 dy}{p^2} - \frac{2y^4 dy}{p^4} + \frac{4y^6 dy}{p^6} - \frac{10y^8 dy}{p^8}$, коей интегралъ равный дугѣ

параболической $АН = y + \frac{2y^3}{3p^2} - \frac{2y^5}{5p^4} + \frac{4y^7}{7p^6} - \frac{10y^9}{9p^8}$.

§ 71.

Можно спрямить такимъ же образомъ и дугу круга, или подойши, сколько можно, близко къ измѣренію долгой ея прямою линеею; но на сіе есть легчайшій способъ слѣдующій: проведши изъ А фиг. 31 касательную линеею Ат, изъ центра С линеею Ст и безмѣрно близко къ ней другую СТ пресѣкающую продолженный шпангенъ въ Т и опу-

опустивши изъ t на cT перпендикуляръ $от$, не трудно понять, что по безмѣрной малости угла tCT внѣшній уголъ AtC будетъ равенъ другому внутреннему tTo и слѣдственно треугольники tTo и AtC въ o и A прямоугольные будутъ подобны. По сему полагая $AC=1$, $At=z$, tT будетъ $= dz$, а $tC=V(1+z^2)$ и $V(1+z^2):1=dz:от$. Отсюда $от=$

$\frac{dz}{V1+z^2}$ и какъ $от$ перпендикулярна къ CT и mn безмѣрно малая дуга опъ прямой линии почти не разнишя; по мнѣ можно почестъ за прямолинейный треугольникъ, коего сторона mn къ mC перпендикулярна (ибо дуга круга всегда къ своему радиусу перпендикулярна) и при томъ mnC будетъ Cto подобенъ такъ, что $Ct:от=Cn:nm$ или $V(1+z^2):$

$\frac{dz}{V1+z^2}=1:mn$. По сему $mn=\frac{dz}{1+z^2}=dz$

$(1-z^2+z^4-z^6+z^8)$ по § 16 калкул. а интегралъ

сей строки есть: $z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^7}{7}+\frac{z^9}{9}$. Ежели

дуга $Ап$ есть въ 45° , то $z=1$ и слѣдственно осьмая доля окружности $=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}$, а для долготы всей окружности должно сию спроку умножить на 8.

При семъ замѣнить должно, что и по данной дугѣ можно найти ея тангенсъ, или полагая найденный рядъ $z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7}$ и проч. = M = дугѣ, коея тангенсъ = z , по данному M можно найти z . Для сего положимъ $z = aM + bM^3 + cM^5 + dM^7$ и проч. и поелику — $M + z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} = 0$,

$$a Z^3 = a^3 M^3 + 3a^2 b M^5 + 3ab^2 M^7 + 3a^2 c M^7 \text{ и проч.}$$

$$Z^5 = a^5 M^5 + 5a^4 b M^7 \text{ и проч.}$$

$$Z^7 = + a^7 M^7,$$

$$\text{по-- } M = -M.$$

$$+ Z = aM + bM^3 + cM^5 + dM^7.$$

$$\frac{-Z^3}{3} = -\frac{a^3 M^3}{3} - a^2 b M^5 - ab^2 M^7 - a^2 c M^7.$$

$$\frac{-Z^5}{5} = +\frac{a^5 M^5}{5} + a^4 b M^7.$$

$$\frac{-Z^7}{7} = -\frac{a^7 M^7}{7}.$$

По сему $a - 1 = 0$; $a = 1$; $b - \frac{1}{3}a^3 = b - \frac{1}{3} = 0$; $b = \frac{1}{3}$;
 $c - a^2b + \frac{a^5}{5} = 0$; $c = \frac{2}{15}$; $d - ab^2 - a^2c + a^4b - \frac{a^7}{7} = 0$; $d = \frac{17}{315}$.
 Слѣдовательно $z = M + \frac{1}{3}M^3 + \frac{2}{15}M^5 + \frac{17}{315}M^7$.

Превращенный способъ тангенсовъ.

Способъ изъ данной касательной лини въ буквахъ, или другой отъ нея зависящей, каковы сущъ субтангенсъ, нормальная и субнормальная, находить самую кривую линию, къ которой онъ принадлежатъ, *способомъ превратнымъ тангенсовъ* именуется.

§ 73.

Для сего изъ даннаго уравненія должно опредѣлить у или сыскашь какое онѣимѣетъ отношеніе къ x; оно покажетъ натуру и свойства кривой лини.

§ 74.

Найти кривую линию, коей субнормальная равна половинѣ параметра? субнормальная =

$\frac{ydy}{dx}$ по § 25. По сему $\frac{ydy}{dx} = \frac{p}{2}$, $2ydy = pdx$, $y^2 = px$ т. е. кривая линия искомая есть Парабола.

§ 75

Найти линию, коей субтангенсъ равенъ $\frac{2y^2}{p}$. $\frac{ydx}{dy} = \frac{2y^2}{p}$, $pdx = 2ydy$ и $y^2 = px$ т. е. сія линия есть Парабола.

§ 76.

Можно такъ же по даннымъ площадямъ, толстошамъ и поверхностямъ, находить самыя кривыя лини, къ коимъ они принадлежатъ, сравнивая данныя количества съ общими *выраженіями* въ чепырехъ предъ симъ находящихся *практапахъ выведенныи*.

§ 77.

Найди кривую линю, отъ обращенія которой около оси происходитъ шѣло, коего

толстоша $= \frac{\pi \cdot p x^2}{4}$: Полагая дифференціалъ сей

толстошы $\frac{\pi}{2} \cdot p \cdot x dx = \frac{\pi}{2} \cdot y^2 dx$, получимъ $p x = y^2$.

§ 78.

Симъ оканчиваю я ученіе о сѣченіяхъ Коническихъ, увѣренъ будучи, что уразумѣвшему предложенные въ ономъ XIII прақтаповъ, поступъ къ дальнѣйшимъ познаніямъ сей части Математики не будетъ труденъ.

ЧАСТЬ II.

О другихъ кривыхъ линияхъ.

§ 79.

Кривыя линии раздѣляются по ихъ уравненіямъ на *Алгебраическія* и *Трансцендентныя*. Дабы сіе представить себѣ явственнѣе, напередъ надобно замѣтить, что такое *уравненіе*, въ которомъ какая нибудь степень аппликаты у равна совершенно, нѣкоторому имѣющему предѣлъ числу членовъ, въ коихъ разныя находятся степени абсциссы x и произведенія на разныя величины, называется *алгебраическимъ*, какъ то $y^2 = ax - xx$ есть уравненіе алгебраическое; ибо въ немъ квадратъ аппликаты совершенно равенъ произведенію постоянной величины a на абсциссу безъ квадрата абсциссы. На противъ того тѣ уравненія, въ коихъ степень аппликаты равна бесконечному числу членовъ содержащихъ въ себѣ абсциссу въ какихъ либо видахъ, называются *Трансцендентными*. Такъ на пр. ежели аппликата равна тангенсу абсциссы; то бесконечно великую должно имѣть спроку членовъ содержащихъ въ себѣ x , дабы сравнить у съ

самимъ x § 71. Такъ же когда $y = \log x$, должно x разрѣшиться на безконечную строку въ разныхъ видахъ, чтобы онъ равенъ былъ y . См. § 93 пунктъ 4.

§ 80.

Алгебраическiя кривыя линiи, коихъ члены уравненiя имѣютъ два измѣренiя, или суть второй степени, принадлежатъ къ первому роду, или называются кривыми *перваго рода*. Ибо одна только прямая линiя въ уравненiи своемъ всѣ члены имѣетъ только первой степени. Ежели же въ членахъ уравненiя кривой линiи находятся при измѣренiи или третья степень; то она *второго рода*; имѣющая въ своемъ уравненiи четвертую степень, есть третьяго рода и т. д. такъ, что родъ всегда единицею меньше самаго большаго въ уравненiи указателя степени. Отсюда видно, что сѣченiя коническiя, кои выше сего описаны, суть кривыя линiи перваго рода.

§ 81.

Ежели вмѣсто опредѣленныхъ указателей въ уравненiи поставятся неопредѣленные; то тогда уравненiе будетъ общее для великаго множества кривыхъ линiей, которое и называется ихъ *фамилею* на пр. Въ уравненiи

$y^2 = px$, поставивъ вмѣсто p^I , p^m и вмѣсто y^2 , y^{m+1} , выйдетъ уравненіе $y^{m+1} = p^m \cdot x$, которое есть общее всей фамиліи Параболъ. Такъ же изъ уравненія $y^2 = ax - xx$ можно сдѣлать общее для всей фамиліи круговъ уравненіе: $y^{m+1} = a^m x - x^{m+1}$.

§ 82.

Поставляя вмѣсто m другія числа, а не единицу, получимъ разныхъ родовъ кривыя линей одной фамиліи, какъ то въ уравненіи для круга поставляя $m=2$, будемъ имѣть $y^3 = a^2 x - x^3$ уравненіе круга втораго рода, а полагая $m=3$ получимъ $y^4 = a^3 x - x^4$, уравненіе круга третьаго рода и т. д. Такимъ же образомъ и въ фамиліи Параболъ получаются разныхъ родовъ Параболы такъ, что $y^3 = p^2 x$ есть уравненіе Параболы втораго рода. Не трудно понять, что въ фамиліяхъ всѣхъ алгебраическихъ линей таковыя разные роды находясь, кои естественнo фигурую между собою должны различествовать, а только одно имѣютъ названіе.

§ 83.

Полеза, которую приноситъ раздѣленіе кривыхъ линей на роды соспоитъ въ томъ, что можно выбирать по произволенію линей изъ многихъ одного рода для рѣшенія задачи;

дачь; а фамиліи показываютъ, что многимъ кривымъ линиямъ есть общее.

§ 84.

Употребительнѣйшія изъ алгебраическихъ линей сущы: *Конхоида* и *Циссоида*; а изъ трансцендентныхъ *Циклоида*, *Спиральная*, *Логариѳмическая* и *Квадрантиксъ*.

§ 85.

О Конхоидѣ Николидовой.

Ежели изъ какой нибудь точки *A* фиг. 1 опустится на прямую линию *ao* перпендикуляръ *AaB* и по томъ изъ оной же точки проведенся нѣсколько линей чрезъ *ao* съ такимъ условіемъ, чтобъ ихъ части находящіяся отъ точки *A* по ту сторону линии *ao* были между собою равны ш. с. $dm = aB$ и проч. то концы сихъ линей изъ *A* проведенныхъ будутъ находиться на кривой линіи называемой *Конхоидою*.

§ 86.

Опустивъ изъ *m* перпендикуляры то и *mH* на *ao* и на *AB* и положивъ $ah = x$, $mH = y$, $aB = dm = b$, $Aa = c$, получимъ изъ подобія треугольниковъ *Ada*, *AmH* пропорцію $Aa:ad = AH: Hm$ или $c: ad = c+x: y$ ш. с. $ad =$

$\frac{cy}{c+x}$. Но какъ $ad = y - do = y - V(b^2 - x^2)$; то с:

$y - V(b^2 - x^2) = c + x$: у, или с. $y = (c + x) y -$

$(c + x) V(b^2 - x^2)$. Отсюда $xy = (c + x) V(b^2 - x^2)$,

$x^2 y^2 = (c + x)^2 (b^2 - x^2) x^2$ а $y^2 = \frac{(c + x)^2 (b^2 - x^2)}{x} =$

$\frac{c^2 b^2 + 2cxb^2 + b^2 x^2 - c^2 x^2 - 2cx^3 - x^4}{x^2} = \frac{c^2 b^2}{x^2} + \frac{2b^2 c}{x} +$

$b^2 - c^2 - 2cx - x^2$. Въ семъ состоятъ уравне-
нїе для Конхоиды.

§ 87.

Поселику чѣмъ далѣе AR отъ перпенди-
кулара АВ, тѣмъ уголъ VAR больше, а АК
или РКТ меньше; то и перпендикуляръ RT
отъ часу становится меньше; но по той
причинѣ, что линия AR пересѣкаетъ отъ,
какъ бы далека отъ перпендикулара АВ
ни была, RT равна нулю быть не можеть.
По сему аТ есть асимптотъ Конхоиды.

§ 88

Еслили $x^2 > b^2$; то $V(b^2 - x^2)$ не возмо-
женъ, по сему у такъ же въ семъ случаѣ не
возможенъ; ибо онъ равенъ $\frac{(c + x) V(b^2 - x^2)}{x}$.

§ 89.

Для отрицательныхъ абсциссъ аппликаты возможны, ибо положивъ вмѣсто x , — x , или взявши dd равную md по другую сторону асимптота и опустивши изъ d перпендикуляръ на асимптомъ, у всегда останется возможнымъ, а слѣдственно произойдетъ другая часть конхойды между точкою А и асимптомомъ.

§ 90.

Отрицательная абсцисса, или перпендикуляръ изъ d на асимптомъ не можетъ быть болѣе dd ; слѣдств. для абсциссы отрицательной большей — b аппликата не возможна.

§ 91.

О Циссоидѣ Діокловой.

Когда на концѣ діаметра АВ, фиг. 2, на коемъ описано полукружіе АОВ будетъ стоятъ перпендикулярно линейя ВС, возьмется на ней по произволѣнію точка Н, проведется къ ней линейя АН и на концѣ назначився точка М въ такомъ разстояніи отъ А, какъ велика линейя Ні п. е. чтобъ АМ была $=$ Ні; то М будетъ находится на кривой линейи называемой *циссоидою*. Уравненіе сея линейи весьма удобно вывести слѣдующимъ образомъ: положиъ АВ $=$ a , АР абсциссу циссоиды $=$

х, РМ аппликашу ея = у, тогда часъ видно, что х: у = а: ВН и х: АМ = а: АН и что ВН = $\frac{ay}{x}$, но какъ изъ проспой геометріи извѣ-

стно, что квадратъ тангенса ВН равенъ произведенію пересѣкающей кругъ линии АН на ея отрѣзокъ Ні, или $ВН^2 = Ні \cdot АН$; то

само по себѣ очевидно, что $\frac{a^2 y^2}{x^2} = \frac{Ні \cdot a \cdot АМ}{x} =$

$\frac{a \cdot АМ^2}{x}, = a \frac{(x^2 + y^2)}{x}$. По сему $ayy = (xx + yy) \cdot x$

или $yy = \frac{x^3}{a - x}$. Вотъ уравненіе для циссоиды,

которое показываетъ 1), что она есть кривая линейя второго рода, 2) что діаметръ полукружія раздѣляетъ циссоиду по поламъ за тѣмъ, что по другую сторону діаметра точно такое же можно сдѣлать полукружіе и точно такія же брать точки М на циссоидѣ находящіяся, 3) что абсцисса ни отрицательною, ни большею нежели а быть не можетъ; ибо иначе уу былъ отрицательный. По сему ни выше В, ни ниже А ни чего изъ циссоиды не находится; 4) что когда $x = 0$, тогда $y = 0$, а когда $x = a$, тогда $y = \infty$ и во обще у тѣмъ спланившись болѣе, чѣмъ х болѣе за тѣмъ, что чѣмъ х болѣе, тѣмъ

тѣмъ числитель дроби $\frac{x^3}{a-x}$ болѣе, а знаменатель меньше. Слѣдов. колѣно кривой линіи AMN оиѣ часу больше удаляется оиѣ АВ, ибо у становится больше и приближается къ ВС, но не можетъ съ нею сойтись такъ, что ВС есть асимптошъ циссоиды.

§ 92.

О Логарифмичѣ.

Естьли брать положительныя абсциссы Аа, АР и проч. фиг. 3 въ Арифметической прогрессіи, а соотвѣствующія имъ аппликации ам Рm и проч. въ прогрессіи геометрической; то кривая линія проходящая чрезъ концы сихъ аппликацѣ, называется *логарифмическою*, за тѣмъ, что абсциссы могутъ быть приняты за логарифмы аппликацѣ. Положимъ, что аппликаца AM=1; то потѣ часъ примѣтимъ, что аппликации большія нежели AM т. е. Рm и пр. имѣютъ положительные логарифмы АР, аппликации меньшія, нежели AM, имѣютъ отрицательныя логарифмы Аρ, $\log AM=0$; сверхъ сего, поелику аппликации сославляютъ умаляющуюся Геометрическую прогрессію безконечную; то кривая линія никогда съ РАρ не можетъ

сойтись, хотя непрестанно къ ней подходить.

§ 93.

Найти субтангенсъ логариѳмики.

Положимъ, что $AB = x$, $BM = y$, $gb = dy$, $Mb = Bf = dx$; то вдругъ увидимъ, что $gb : Mb = MB :$

Bt , или $dy : dx = y : \frac{ydx}{dx} = Bt =$ субтангенсу. По

сему для другой абсциссы $Aa = v$ и аппликаты $am = z$ выйдетъ субтангенсъ $\frac{zdu}{dz}$. Но какъ

абсциссы при Логариѳмической линіѣ растутъ прогрессією Ариѳметическою; а аппликаты находящіяся въ Геометрической прогрессіи; то $dx = du$: ибо разность между двумя абсциссами непосредственно въ прогрессіи одна за другою слѣдующими должна быть одинакова; а $y + dy : y = z + dz : z$, или $y : dy = z : dz$ т. е.

$\frac{y}{dy} = \frac{z}{dz}$. Слѣдственно $\frac{ydx}{dy} = \frac{zdu}{dz}$ и субтангенсы

одной Логариѳмики всѣ равны между собою.

1) Отсюда слѣдуетъ, что ежели положишь

$\frac{ydx}{dy} = a$; то $dx = \frac{ady}{y}$; но $x = \log y$. Слѣдств. $d \log y =$

$\frac{ady}{y}$ и $\int \frac{dy}{y} = \frac{x}{a}$, а $x = a \cdot \int \frac{dy}{y}$. Т. е. дифференціалъ

логариѳма равенъ субтангенсу логариѳмики умноженному на дифференціалъ соотвѣствующаго количества и раздѣленному на самое оное количество. Такъ же Интегралъ всякаго дифференціала раздѣленнаго на количество, отъ коего онъ взятъ, есть его логариѳмъ раздѣленный на субтангенсъ.

2) Если субтангенсъ логариѳмики $= b$; то логариѳмъ будетъ равенъ $b \int \frac{dy}{y}$. Т. е. логариѳмы содержащіяся, какъ субтангенсы разныхъ логариѳмическихъ линей.

3) Когда субтангенсъ логариѳмики $= 1$; тогда $d \log y = \frac{dy}{y} =$ *дифференціалу отъ у раздѣленному на самый у*. Такіе логариѳмы, въ коихъ субтангенсъ $= 1$, называются *Иперболическими*.

4) Найди Иперболическій логариѳмъ чиселъ $1+y$, и $1-y$. Поскольку $d \log (1+y) = \frac{dy}{1+y}$; то сполнитъ только $\frac{1}{1+y}$ превратить въ безконечную строку и умноживъ нѣсколько членовъ на dy , взять интегралъ. Но какъ $\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 - y^3 \dots$, $\frac{dy}{1+y} = dy - ydy + y^2dy - y^3dy \dots$ Слѣдо-

ващельно $f \frac{dy}{1+y} = \log (1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \dots$

Такъ же $d \log (1-y) = - \frac{dy}{1-y}$. По сему умноживъ безконечную спрокую, на которую разрѣшается $\frac{1}{1-y}$ п. е. $1 + y + y^2 + y^3 \dots$ на $-dy$,

получимъ $-dy - ydy - y^2dy - y^3dy \dots$ а $f \frac{-dy}{1-y} =$

$y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \dots = \log (1-y)$. Отсюда \log

$(1+y) - \log (1-y) = 2y + \frac{2y^3}{3} + \frac{2y^5}{5} \dots = \log$

$\frac{1+y}{1-y}$. Изъ сего видно, что зная число y , можно находить логариемъ его точно такъ

же, какъ по данной дугѣ можно находить соотвѣтствующій ей тангенсъ см. § 79...

5) Полагая $\frac{(1+y)}{1-y} = 10$, найдемъ, что $y =$

$\frac{9}{11}$, и что, подставляя вмѣсто y въ знаменова-

ннй $\log \left(\frac{1+y}{1-y} \right)$ и превращая спрокую въ десяти-

чные дробн, выйдетъ $\log 10 = 2.302585$.

Сей Иперболическій логариемъ 10 означимъ

буквою N , такъ же полагая $\frac{1+y}{1-y} =$ какому-

нибудь числу можно находить его Иперболи-

ческій логариемъ.

6) Поскольку логарифмы одного числа содержатся как субтангенсы разных логарифмиков; то Иперболическій логарифмъ ю. содержится къ логариѣму ю въ таблицахъ, какъ субтангенсъ Иперболической логариѣмики содержится къ субтангенсу логариѣмики; по которой сочинены таблицы т. е. $N: 1 = 1: x$.

По сему $x = \frac{1}{N} = 0,434294 =$ субтангенсу табличной Логариѣмики.

7) Отсюда слѣдуетъ, что по данному табличному логариѣму A числа B , можно легко найти Иперболической его логариѣмъ по пропорціи $\frac{1}{N}: 1 = A: z$. слѣд. $Z = N.A =$

A умноженному на 2,302585 и обратно зная z , можно найти A , раздѣляя z на N .

8) При семъ приложимъ такъ же способъ, брать дифференціалъ количества x^y , которое называется *Експоненціальнымъ*. Положивъ

$x^y = Z$, получимъ $y \log x = \log z$, и $y d \log x + dy \log x = d \log z$, но $d \log x = \frac{dx}{x}$, а $d \log z = \frac{dz}{z}$; то $\frac{y dx}{x}$

$+ dy \log x = \frac{dz}{z}$ и $dz = zy dx + z dy \cdot x \log x$. Поставивъ

же вмѣсто z , x^y , получимъ $\frac{x^y \cdot y dx}{x} + x^y dy \cdot \log x = dz$.

$z = x^{y-1} y dx + x^y dy \cdot \log x = dz$.

Найти площадь логарифмического пространства.

9) Поскольку субтангенс $\frac{ydx}{dy}$ есть постоянное количество; то назови его буквою a . По сему $\frac{ydx}{dy} = a$, $ydx = a dy$, $\int a dy = \int y dx = ay$. Но какъ $ydx = VMgf =$ площади дифференціала отъ всего безпредѣльнаго пространства $fgnp$; то сія безпредѣльная площадь $= ay$. Такъ же площадь $AMnp = az$ полагая $AM = z$. Следовательно площадь $fgAM = ay - az = a(y - z)$ ш. с. равна прямоугольнику изъ субтангенса и разности аппликашъ.

§ 94.

Ежели окружность круга APA фиг. 4 раздѣлить на равныя части AP , PP и проч. и радіусъ CA на столько же раздѣлить равныхъ частей, на сколько раздѣлена окружность, а по томъ взявъ часть $Cm = 3$ частямъ, и такъ далѣе; то точки M и m будутъ находиться на спиральной линіи *Архимедовой*. Сія линія по произволению можетъ быть продолжаема безконечно, посредствомъ новыхъ круговъ, кои описывать должно двойнымъ, тройнымъ и ш. д. радіусомъ.

§ 95.

Положивъ, что окружность $= r$, радиусъ $= r$, $AP = x$, $PM = y$, а $CM = r - y$; то $r : x = r : r - y$, и $ry - py = rx$. Ежели же $= CM = y$, то $py = rx$.

§ 96.

Найти субтангенсъ въ спираальной линиѣ.

Положимъ, что *фиг. 5*, $AB = a$, окружность $= r$, дуга $BD = x$, $AG = y$, и Ac къ Ad безконечно близокъ. По сему $CD = dx$, $EF = dy$ и поелику EG можетъ почтена быть за дугу, коея радиусъ естъ AG ; то $AD : AG = CD : EG$ или $a : y = dx : \frac{ydx}{a}$. Но какъ EG съ FA составляе-
 стъ прямой уголъ (ибо радиусъ къ своей дугѣ всегда перпендикуларенъ); такъ же $АН$ поставлена перпендикулярно къ $ЕА$: то треугольникъ EFG , въ коемъ дуга EG принимается за прямую линію, подобенъ треугольнику FAH , ибо они кромѣ прямыхъ угловъ имѣютъ общій уголъ при F . По сему можно сказать, что $EFG \propto AGH$, ибо уголъ AGH (такъ какъ внѣшній) $= AFH + FAG = AFH$, по безконечной малости угла FAG измѣряемаго дугой EG . И такъ $FE : EG = AG : AH$ или $dy : \frac{ydx}{a} = y : AH$ и $AH = \text{subtang} = \frac{y^2 dx}{ady}$. По свойству

же Архимедовой спиральной лини $ax = py$, и $adx = pdy$; по поставляя вмѣсто dx , $\frac{pdy}{a}$, по-

лучимъ $AN = \text{subtang} = \frac{py^2 dy}{a^2 dy} = \frac{py^2}{a^2} = \frac{axy}{a^2} = \frac{xy}{a}$. Изъ

сего видно, что субтангенсъ найти, или провести къ спиральной линиѣ тангенсъ не иначе можно, какъ превративъ дугу x въ прямую линію, и обратно, естли бы кто нашелъ субтангенсъ спиральной лини, то можно бы было спрямить дугу круга.

§ 97.

Ежели абсциссы AP , PP и проч. фиг. 4 на окружности круга брать въ прогрессіи Арифметической, а части радіуса CM , cm и пр. имѣ соотвѣтствующія въ геометрической; то точки M , m , n и проч. находятся будущъ на линіѣ, которая называется *спиральной логарифмической*; ибо тогда дуги были бы логарифмы частей радіуса.

Прибавленіе. Найти площадь Спиральнаго пространства.

Поелику по § 96, фиг. 5 дуга $EG = \frac{ydx}{a}$;

то площадь сектора $AEG = \frac{y^2 dx}{2a}$. Но какъ сей безмѣрно малый секторъ есть дифферен-

ренціалъ пространства ВАЕ, и при помѣ
 $ax = py$ и $y^2 = \frac{a^2 x^2}{p^2}$; то $y \cdot \frac{dx}{2a} = \frac{ax^2}{2p^2} \cdot dx$. Слѣд-
 ственно пространство ВАЕ, или $\int \frac{y^2 dx}{2a} = \int \frac{ax^2 dx}{2p^2} =$
 $\frac{ax^3}{6p^2}$. Ежели же вмѣсто x положишь всю окру-
 жность p ; то все Спиральное пространство
 ВАГЕВ будетъ равно $\frac{ap}{6}$, и поелику площадь
 сего круга $= \frac{ap}{2}$; то Спиральная площадь со-
 держится къ площади круга, какъ $\frac{ap}{6} :$
 $\frac{ap}{2} = 1 : 3$.

§ 98.

Ежели себѣ представить, что кругъ при-
 касается къ прямой линіи въ какой нибудь
 точкѣ, по томъ начнетъ капиться по оной
 линіи до тѣхъ поръ, пока опять тою же
 точкою прикоснется къ линіи; то кривая
 линія описываемая сею точкою называется
циклоидою или трохидою ил. е. колесо-
 образною (*die Rad linie*). Такъ въ фигурѣ
 б, ежели бы кругъ съ начала точкою і при-
 касался въ А къ линіи АС, и по томъ на-
 чалъ бы капиться; то пнчка і опхотя отъ А
 описала бы кривую линію АіВС.

§ 99.

Изъ самаго произхожденія сей линіи видно 1), что $AC =$ окружности круга производящаго циклоиду; ибо всѣ точки окружности должны перебыть на прямой линіи AC пока опять придетъ на нее f . 2). что AR равная половинѣ $AC =$ полукружью RmB , 3) что дуга $fg =$ линіи Ag ; ибо всѣ точки дуги fg , должны были прикоснуться къ линіи AC , прежде нежели коснется къ ней g .

§ 100.

Ежели провести параллельную линію съ Ae ; то $fp = mz$ по причинѣ равнаго отстоянія отъ тангенса, а по тому и отъ центра; слѣдовательно и половины ихъ fk и mp равны между собою. Отсюда видно, что треугольникъ $kfg =$ треуг. pzR и уголъ $f = z$, а дуга $fg = Pg = mR$. По сему $mR =$ линіи Ag .

§ 101.

Изъ равенства треугольниковъ $fk g$ и mpR слѣдуетъ, что хорда $fg =$ хордѣ mR и параллельна, ибо уголъ $gfk = Rmp$ по равенству треугольниковъ. И такъ $fm = gR =$ дугѣ mB . Слѣдственно называя $fm = y$, дугу $Bm = x$ лучимъ $x = y$.

§ 102.

Ежели же уравненіе принаровить къ перпендикуляру BR изъ середины основанія возсравленному, копіорый называется *осью циклоиды* то $fp = y + \sin x$, ибо $mp = \sin$. $mB = \sin x$.

§ 103.

Найти субтангенсъ циклоиды.

Провестъ надлежитъ тангенсъ tm къ кругу фиг. 7. и параллельную ему линію fk . Поелику въ треугольникъ flk , lf можетъ почестся по безконечной своей малости за прямую линію; то можно его принять за прямолинейный, и какъ kl параллельна съ fm , а kf параллельна tm ; то треугольникъ $flk \sim ftm$ и $lk:fk = fm:tm$ или $dy:dx = y:mt$;

по сему $mt = s = \frac{ydx}{dy}$. Слѣдовательно mt есть субтангенсъ циклоиды. Но какъ въ циклоидѣ

$x = y$ и $dx = dy$; то $\frac{ydx}{dy} = \frac{ydy}{dy} = y$. т. е. субтан-

генсъ = аппликашѣ. Слѣдовательно, дабы провести къ точкѣ f циклоиды тангенсъ, надлежитъ только на тангенсъ къ точкѣ m круга производящаго циклоиду взять $mt = y$ и изъ t къ f провести линію.

Послику $mt = fm$, то уголъ $mft = mtf$. Слѣдовашельно внѣшній уголъ $tmP = 2mtf = tmB + Bmb = 2tmB$. Ибо $tmB = Bmb$ по тому, что tmB измѣряется половиною дуги mB , такъ же и Bmb измѣряется половиною $Bb = mB$. И такъ $mtf = tmB$. Слѣдовашельно ft параллельна mB , или тангенсъ къ циклоидѣ параллеленъ хордѣ круга mB .

Найти площадь циклоидальнаго пространства.

Положимъ, что діаметръ круга раждающаго, фиг. 7 $= 1$ $Bp = x$, $Pq = dx = fn$. $Pm = y = \sqrt{x - x^2}$. Послику треугольникъ $lfn \infty mBP$ (ибо $P = n = R$, $fn = tm = BmP$) и $BP : Pm = fn : ln$, или $x : \sqrt{x - x^2} = dx : ln$. Слѣдовашельно $ln = \frac{dx \sqrt{x - x^2}}{x}$. Ежели $ln = of$ умножить на $hf =$

$BP = x$; то получится площадь безконечно малаго прямоугольника gf которой есть дифференціалъ внѣшняго пространства Bfh . Слѣдовашельно $dx \sqrt{x - x^2} = gf$. Но какъ дифференціалъ круговаго сегмента mBP такъ же $= dx \sqrt{x - xx}$; то пространство $Bfh = BmP$; а изъ сего видно, что увеличивая x , на концѣ увидимъ, что $BDA =$ полукружію BmR .

BmR . Слѣдственно вычепши изъ площади $ADBR$ площадь полукружія, найдемъ площадь полуциклоиды. И такъ площадь полуци-

$$\text{клоиды} = AR \cdot BR - \frac{BmR \cdot BR}{4} = \frac{3AR \cdot BR}{4} \quad (\text{ибо}$$

$BmR = AR$), а все пространство циклоидальное $ABC = \frac{3}{2}AR \cdot BR$, и слѣдственно въ шрое больше площади раждающаго круга за тѣмъ, что площадь всего круга $= \frac{AR \cdot BR}{2}$.

§ 106.

Спрямитъ дугу циклоиды $Bf = s$ фиг. 7.

Поелику $fn = Pq = dx$, а $ln = \frac{dx \sqrt{(x - xx)}}{x} = dy$; то

$$If = ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(dx^2 + dx^2 \cdot \left(\frac{x - xx}{x^2}\right))} =$$

$$\sqrt{(dx^2 + \frac{dx^2}{x} - dx^2)} = \sqrt{\left(\frac{dx^2}{x}\right)} = \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} = dx \cdot x^{-\frac{1}{2}}. \text{ И такъ}$$

интегралъ отъ $ds = s = 2\sqrt{x} = 2\sqrt{(x \cdot 1)}$. По сему s естъ удвоенная средняя пропорціональная линия между абсциссою $BR = x$ и діаметромъ $AR = 1$ и въ двое больше хорды mB . Такъ же дуга AB въ двое больше діаметра BR , а вся циклоида $= 4$ діаметрамъ круга оную раждающаго.

Найми время низхожденія какого нибудь тѣла по дугѣ СВ циклоиды фиг. 8.

Проведши CD перпендикулярную къ діаметру $DB = 2r$, описавши полукружіе DnB и abB и предполагая всѣ линіи, кои въ фигурѣ находятся, положимъ $aB = 2a$, $DP = x$, $nP = y$; то Pp будетъ $= dx$, $PB = 2r - x$; а $y = \sqrt{(2rx - xx)}$. Ежели положимъ, что время низхожденія по дугѣ $Cm = t$; то время низхожденія по дугѣ ms , коя есть дифференціалъ отъ Cm , будетъ $= dt$; но какъ скорость приобрѣтенная паденіемъ по Cm по правиламъ механики пропорціональна \sqrt{x} , то есть корню высоты, принимая Cm за наклоненную плоскость, смотр. стр. 436 Физики; то пространство во время dt перейденное будетъ $= dt \sqrt{x}$. Ибо во время dt движеніе приеется за равномерное см. стр. 427 Физики. И

такъ $ms = dt \sqrt{x}$ и $dt = \frac{ms}{\sqrt{x}}$. Сверхъ сего по-

елику тангенсъ mg циклоиды, параллеленъ хордѣ bB ; то треугольникъ $mrs \propto BbP$ (ибо $r = P = R$, уголъ $m = b$) и $ms:rs = bB:PB$, а bB^2 , какъ извѣстно изъ геометріи, равенъ $aB \cdot BP$, или $aB:bB = bB:PB$, или $aB:PB = (bB)^2:(PB)^2$ смотр. физ. стр. 436 Изъ сего видно, что $bB:PB = \sqrt{aB}:\sqrt{PB}$ и $ms:rs = \sqrt{aB}:\sqrt{PB}$,
или

или $ms: dx = V(2a): V(2r-x)$. Слѣдственно $ms =$

$\frac{dx \sqrt{2a}}{V(2r-x)}$; поставляя сию величину въ преж-

немъ уравненіи вмѣсто ms , получимъ $dt =$

$$\frac{dx \sqrt{2a}}{V(2r-x)V(x)} = \frac{dx \sqrt{2a}}{V(2rx - xx)} = \frac{2r dx \sqrt{2a}}{2r V(2rx - xx)}. \quad \Delta$$

ежели теперь вспомнимъ изъ § 69, что

$$no = d(nD) = \frac{r dx}{V(2rx - xx)}, \text{ то } dt = \frac{no \cdot 2\sqrt{2a}}{2r}$$

и $t = nD \cdot \frac{2\sqrt{2a}}{2r}$, ибо $nD =$ интегралу отъ no .

Ежели дуга циклоиды Cm сдѣлается дугою CB ; то Dn сдѣлается $= DnB$, и время низхо-

$$\text{жденія по } CB = t = \frac{DnB \cdot 2\sqrt{2a}}{2r} = \frac{DnB \cdot c}{DB} \quad (\text{полагая}$$

$2\sqrt{2a} = c$). По сему время низхожденія по

$$\text{дугѣ } AB = T = \frac{c \cdot abB}{aB}. \text{ Отсюда } t: T = \frac{DnB}{DB} : \frac{abB}{aB}$$

и послѣду содержаніе между полукружіемъ и діаметромъ всегда одинаково; то прѣпій членъ равенъ четвертому, а слѣдственно и $t = T$. т. е. въ циклоидѣ всѣ дуги перебѣгаются въ одинакое время, ежели нѣтъ отъ посредствующихъ шѣлъ прѣпятствія.

§ 108.

Поселику время t низхожденія по дугѣ $CB = \frac{DnB \cdot 2\sqrt{2a}}{2r}$; то $2r: DnB = 2\sqrt{2a}: t$; и какъ $2\sqrt{2a}$

$$= \frac{2a}{\frac{1}{2}V(2a)}, \text{ то } 2r: DnB = \frac{2a}{\frac{1}{2}V(2a)} : t. \text{ Но извѣ-}$$

стно, что скоростъ опъ паденія вертикальнаго по діаметру $aB = V(2a)$; а по тому $\frac{1}{2}V(2a)$ означаетъ половину сей скорости приобрѣтенной опъ паденія по діаметру круга рождающаго циклоиду. И такъ полагая время паденія по $aB = p$, получимъ пространство въ то же время p движеніемъ равномернымъ описываемое $= 2aB$. Слѣдовательно $V(2a) = \frac{2aB}{p}$ и $\frac{1}{2}V(2a) = \frac{aB}{p}$, $p = \frac{2a}{\frac{1}{2}V(2a)}$. Подставляя сію

$$\text{величину въ пропорціи } 2r: DnB = \frac{2a}{\frac{1}{2}V(2a)} : t,$$

откроемъ, что $2r: DnB = p: t$, или время низхожденія по діаметру круга рождающаго циклоиду, содержишя ко времени низхожденія по какой нибудь дугѣ циклоиды такъ, какъ діаметръ, къ своей полуокружности.

§ 109.

Представимъ себѣ превращенную полуциклоиду, фиг. 9 находящуюся на перпендикулярной плоскости къ горизонту такъ, что бы E означало верхъ, а AB параллельная горизонту

пу представляла бы основаніе; и ежели въ
почкѣ В повѣшенъ будетъ отвѣсъ Р на
ниткѣ такой же длины, какъ полуциклоида,
по томъ ниткою обойдемъ циклоиду и оста-
вимъ отвѣсъ въ свободѣ; то почка Р у-
даляясь отъ Е постепенно, будетъ удалять
нитку отъ всѣхъ почекъ циклоиды и опи-
шетъ другую полуциклоиду ERg равную
прежней $ЕТВ$, коея верхъ будетъ въ g и ось
 gD будетъ перпендикулярна къ горизонту.
На оси $АЕ$ опишемъ надлежитъ полукруга
 $іАЕ$ рождающаго циклоиду, проведъ $ЕГ$,
которая бы пересѣкала вертикальную линію
 Bg въ D , взявъ $Dg = АЕ$, и на діаметръ Dg
описать кругъ. Ежели нитка поддерживаю-
щая отвѣсъ придесть въ вертикальное по-
ложеніе, то нѣло Р будетъ въ g . Ибо по-
луциклоида $ВЕ = 2АЕ$. По томъ ежели чрезъ
почки Р и Т проведъ линіи Tf и $РН$ па-
раллельныя съ ED ; то, поелику часть нитки
 $ТР$ разтянувшаяся въ прямую линію равна
дугѣ $ЕТ$, которую она прежде закрывала;
томъ часъ видно, что $ТР = 2Ef = 2TN$,
(ибо $ТР$ параллельна съ $Еf$). Слѣдовательно
 $TN = РН$, линія $ЕН$ равно отстоитъ отъ
 Tf и отъ $РН$, $Еf$ и HD суть равныя хорды
(ибо $yE = Dl$, и $yf = Hl$) такъ какъ половин-
ныя хорды равно отстоящія отъ тангенса,
а слѣдов. и отъ центра).

По сему дуга $Ef = \text{дугъ } HD$ и хорда Ef параллельная NP , параллельна HD за тѣмъ, что уголъ сегмента $\angle ED = \text{углу } EDH$ и ND равна PH , (ибо параллельныя между параллельными равны между собою). Но какъ по свойству циклоиды дуга круга $Ef = HD = fT$ и $Af = ND = PH = gH$; по назвавъ $gH = x$, $PH = y$, получимъ $x = y$, уравненіе для циклоиды. Но ежели аппликашы PL оканчивающіяся на оси, то $y = x + \sin x$, другое уравненіе для циклоиды.

§ 10.

Ежели полуциклоида $Bf = BE$ будетъ въ такомъ же превратномъ положеніи, какъ BE ; то шѣло P можетъ пройти длину полуциклоиды $gF = gE$ между тѣмъ, какъ нитка будетъ удаляться отъ полуциклоиды $B \text{ къ } F$. И такъ посредствомъ двухъ циклоидальныхъ дугъ BE , Bf можно сдѣлать, чтобы отвѣсъ описывалъ дуги превращеній циклоиды EgF .

§ 11.

Ежели отвѣсъ отъ P доходитъ на пр. до M ; то онъ производитъ одинъ размахъ слѣд. можно сдѣлать, чтобы отвѣсъ дѣлалъ свои размахи или качанія по дугѣ циклоиды. Но какъ по § 108 время низхожденія по ка-

кой-

койнибуть дугѣ циклоиды Pg ко времени паденія по діаметру Dg содержится какъ полуокружность къ своему діаметру; то время размаха подугѣ PgM равной $2Pg$ содержится ко времени паденія по діаметру Dg , или по половинной длинѣ отвѣса, какъ окружность къ своему діаметру.

§ 112.

Поелику дуга круга pgr шѣмѣ точнѣе сходится съ дугою циклоиды; чѣмѣ она меньше; то приемлется за истинну, что отвѣсъ совершающій по весьма малымъ дугамъ размахи, совершаетъ ихъ въ равныя времена, хотя бы сіи дуги были и не равны.

§ 113.

Отсюда видно, что время размаха совершаемаго отвѣсомѣ по весьма малой дугѣ круга pgr содержится ко времени паденія по діаметру Dg , какъ окружность къ своему діаметру.

§ 114.

Полагая время размаха $= T$, время паденія по діаметру Dg или по половинной длинѣ отвѣса $Bg=t$, окружность $= P$, діаметръ $= d$; получимъ $T:t = P:d$ или $T = \frac{P}{d} \cdot t$. По сему

называя время размаха совершаемого другимъ отпѣсомъ буквою Q , а время паденія по половинѣ его $= q$, получимъ $Q = \frac{P}{d} \cdot q$ Слѣдственно $T: Q = t: q$; но какъ времена содержатся при паденіи шѣлъ съ верху въ низъ, какъ корни квадратные изъ пространствъ. См. стр. 427 физики; то явно, что времена размаховъ содержатся какъ корни квадратные изъ половинныхъ, а слѣдственно и изъ цѣлыхъ долготъ отпѣсовъ см. стр. 443 физики.

§ 115.

О квадратриксѣ.

Ежели четверть круга BnD фиг. 10 раздѣлится на равныя безконечно малыя части и радіусъ BA на такое же число равныхъ частей раздѣленъ будетъ, а попомъ къ точкамъ дѣленія четверти круга проведутся радіусы $Аn$, $Аn$ и проч. чрезъ точки же дѣленія радіуса протянутся pm ; pm и pr . съ AD параллельныя; то чрезъ точки пресѣченія m , n и pr . сихъ линей съ радіусами пройдетъ кривая линия называемая *квадратриксъ Диностратова*. Положивъ четверть круга $BnD = a$, $BA = r$, дугу $Bn = x$, $Bp = y$, всегда будемъ имѣть $a: x = r: y$, или $ay = rx$. Дабы найти точку f , въ которой квадратриксъ сходится съ радіусомъ AD , при-

примемъ безконечно малую дугу hD за часть тангенса къ точкѣ D . По сему треуг. $AhD \propto APo$, ибо $D = R = P$, и $PoA = oAf$, а $AP: hD = Po: AD = Af: AD$ или къ AB за шѣмъ, что o къ f безмѣрно близко и по тому $Po = Af$, и $AD = AB = r$. Но какъ BP и Bh суть подобныя части радіуса и окружности; по и оспашки AP и hD суть такъ же подобныя части своихъ цѣлыхъ и содержащія какъ цѣлыя, то есть $AP: hD = AB: BnD = r: a = Af: r$. Отсюда видно, что Af есть третья пропорціональна къ a и r ш. е. четверти круга и радіусу, а четверть круга есть третья пропорціональная къ Af и r . По сему можно бы было найти линію прямую по геометріи равную четверти круга, ежели бы Af геометрически опредѣлена была, и площадь круга сравнена бы была совершенно съ квадратомъ. Вотъ причина названія сей линіи. Но ежели точка o сойдесть съ f ; то Po параллельная съ AD , нигдѣ не пересѣчетъ Ah , которая тогда упадеши на AD и слѣдовательно точки f опредѣлить не можно; ежели же hD принять за весьма малую дугу; то безъ чувствительной погрѣшности можно положить $Po = Af$.

§ 116.

Въ заключеніе всѣхъ сихъ разсужденій упо-

упомянемъ о дифференціалахъ второй степени. Дифференціалы отъ дифференціаловъ взятые называются *дифференціалами второй степени*. $d(dx) = ddx$; $d(xdy + ydx) = xddy + dydx + yddx - dx dy$. Во обще съ дифференціалами первой степени въ семъ случаѣ поступать должно точно такъ какъ съ переменными количествами, ежели по силѣ задачи не будетъ видно, что который нибудь изъ дифференціаловъ будетъ постояннъ.

§ 117.

Главнѣйшее употребленіе сихъ дифференціаловъ состоитъ въ слѣдующихъ матеріяхъ:

- 1) Находить радіусъ *кривизны* см. § 50
- 2) Находить точки противнаго наклоненія (*Puncta flexus contrarii*).

§ 118.

Опредѣлить длину радіуса кривизны (*Radium evolutae, Radium osculi*), когда аппликаты РМ кривой АМД къ оси АВ перпендикулярны фиг. 13.

Положимъ, что рм безконечно близка къ РМ такъ какъ и радіусъ СМ къ Ст, проведемъ СЕ параллельную оси, которая пресѣчетъ аппликашу въ Е. Поелику при R и E углы прямые и $RMm = EMc$, ибо общій имѣютъ

юмъ уголъ дополненія къ 90° CMR; по MR:

$$Mm = ME : MC, \text{ или } dx : V(dx^2 + dy^2) = z : z$$

$V \frac{(dx^2 + dy^2)}{dx}$. Но какъ центръ дуги Mm находится въ C и радіусъ MC при переменныхъ ME и mR постояненъ; по дифференціалъ радіуса CM въ отношеніи къ дифференціалу mR линии ME ничего не значить. И такъ дифференціалъ радіуса MC, принимая dx за постоянное количество т. е. за равное во всѣхъ точкахъ кривой линии, будетъ $= dz \cdot dx$

$$V \frac{(dx^2 + dy^2)}{(dx)^2} + \frac{z dy ddy \cdot dx}{dx^2 V(dx^2 + dy^2)} = \left(\frac{dz dx^2 dx + dx dz dy^2}{dx^2 V(dx^2 + dy^2)} + \frac{z dy ddy \cdot dx}{dy^2} \right) = \frac{dz dx^2 + dz dy^2 + z dy ddy}{dx V(dx^2 + dy^2)}. \quad \text{По сему}$$

$$dz dx^2 + dz dy^2 + z dy ddy = 0, \quad \text{и} \quad dz dx^2 + dz dy^2 =$$

$$-z dy ddy, \quad \text{а} \quad z = \frac{dz dx^2 + dz dy^2}{-dy ddy}; \quad \text{но какъ } dz = dy$$

(ибо приращеніе y и ME есть одно и тоже);

$$\text{по } z = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}, \quad \text{а } MC = r = \frac{(dx^2 + dy^2) V(dx^2 + dy^2)}{-dx ddy}.$$

Теперь, ежели величину dy^2 и ddy изъ уравненія для каждой кривой линии опредѣлить чрезъ

чрезъ x ; то найдётся величина z , а по тому и величина r .

§ 119.

Въ Параболѣ $px = y^2$, $pdx = 2ydy$, $dy =$

$$\frac{pdx}{2y}, \quad dy^2 = \frac{p^2 dx^2}{4y^2}; \quad dy^2 + dx^2 = \frac{p^2 dx^2}{4y^2} + dx^2 =$$

$$\frac{(p^2 + 4y^2) dx^2}{4y^2} = \frac{(p^2 + 4px) dx^2}{4px}. \quad \text{Что же касается}$$

до знаменателя найденной формулы — ddy ,

то онъ найдётся изъ $dy = \frac{pdx}{2y}$ полагая, что dx есть непремѣнное количество, т. е. $ddy =$

$$d\left(\frac{pdx}{2y}\right) = d\left(\frac{pdx}{2\sqrt{px}}\right) = - \frac{p dx}{4\sqrt{px}}$$

$$= - \frac{p^2 dx^2}{4\sqrt{px} \cdot px} = - \frac{pdx^2}{4x\sqrt{px}}, \quad \text{а} \quad - ddy = \frac{pdx^2}{4x\sqrt{px}}. \quad \text{Отсю-$$

$$\text{да слѣдуетъ, что} \quad \frac{dx^2 + dy^2}{- ddy} = \frac{(p^2 + 4px) dx^2}{4px} \quad dx^2:$$

$$\frac{pdx^2}{4x\sqrt{px}} = (p^2 + 4px) \frac{\sqrt{px}}{p^2} = (p^2 + 4y^2) \frac{y}{p^2}. \quad \text{И такъ}$$

ежели сію величину умножимъ на $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$
т. е.

т. е. на корень $\left(\frac{p^2+4px}{4px}\right) dx^2$, или на dx .

$\frac{V(p^2+4y^2)}{2y}$, а по томъ раздѣлимъ на dx
(ибо $r=z \cdot \left(\frac{Vdx^2+dy^2}{2y}\right)$); то получимъ $r = \frac{(p^2+4y^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2}$.

Ся формула показываетъ, 1) что радіусъ кривизны въ параболѣ равенъ кубу нормальной линии раздѣленному на квадратъ половины пара-

метра; ибо нормальная $= V\left(\frac{p^2}{4} + y^2\right)$ (за тѣмъ,

что субнормальная $= \frac{p}{2}$) $= \frac{1}{2}V(p^2+4y^2)$; кубъ

нормальной линии $= \frac{1}{8}(p^2+4y^2)^{\frac{3}{2}}$; будучи же раз-

дѣленъ на $\frac{p^2}{4}$ составитъ прежнюю величину

$r = \frac{(p^2+4y^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2}$. 2) Что при самомъ верхѣ пара-

болы $r = \frac{p}{2}$, ибо въ семъ случаѣ $y=0$. Изъ сего

удобно понять, что всякая парабола въ без-
мѣрно малой дугѣ своей подлѣсамаго верха оси
находящейся такую же имѣетъ кривизну,
И
какую

какую кругъ половиною ея параметра описанный; но какъ упругія тѣла параллельно оси брошенныя въ параболу отскакиваютъ въ фокусъ; то и сферической сегментъ тѣла падающія параллельно его оси въ безмѣрно маломъ отъ нея разстояніи, отбрасываетъ въ фокусъ, или собираетъ вмѣстѣ въ разстояніи полурадіуса.

§ 120.

По сему и сферическія вогнутыя зеркала собирая солнечныя лучи въ безмѣрно маломъ отъ оси разстояніи падающіе въ свой фокусъ, котораго разстояніе отъ верха равно $\frac{1}{4}$ діаметра, могутъ быть зажигательными, хотя и не столь сильно, какъ параболическія. Ибо въ сихъ послѣднихъ всѣ лучи параллельные оси собираются въ одну точку, а въ сферическихъ только тѣ, кои по самой оси падаютъ или безмѣрно къ ней близко, а прочіе отражаются къ другимъ точкамъ, въ слѣдствіе того закона Катоπτрическаго, что уголъ паденія всегда равенъ углу отраженія.

§ 121.

Радіусъ кривизны называется *радіусомъ*
ра-

разогнутой кривой лини (*radius evolutae*) Для разумѣнія сего должно себѣ представитъ, что ежели въ фиг. 9 см. § 109 полуциклоида ВТЕ представляетъ какую нибудь кривую линию и нитка ее покрывающая, съ равнымъ вездѣ напряженіемъ, удаляясь мало по малу описываетъ другую кривую линию ЕРg; по первая называется въ разсужденіи другой *разогнутою* (ВТЕ *evoluta curvae* ЕРg); а линія на пр. ТР *радіусъ кривизны*, или *радіусъ разогнутой кривой лини*. Онъ очевидно равенъ дугѣ ЕТ. см. § 109.

§ 122.

Когда кривая линія АГК фиг. 11 съ начала вогнутою, а по томъ выпуклою къ оси АЕ обращается стороною, а между тѣмъ отъ оси удаляется; то точка Г, въ коей сей поворотъ кривой линіи происходитъ, называется *поворотною точкою*; а та точка, въ которой она опять обращается къ оси, *возвратною точкою*. Обѣ онѣ называющіяся *точками противнаго накло-ненія*.

§ 123.

Ежели кривая линія имѣетъ одну *точку поворотную*; то линія АТ съ абсциссою АР до тѣхъ поръ увеличиваются, пока абсцисса

И 2

дой-

дойдетъ до Е, ибо какъ скоро кривая линия поворотится, то линия АТ начнетъ уменьшаться, а абсцисса продолжаетъ увеличиваться. По сему можно линію АЕ принять за самую большую въ своемъ родѣ.

§ 114.

На противъ того, ежели кривая линия имѣетъ *возвратную точку*; то съ начала линия АТ растетъ съ абсциссою до L, по томъ послѣ возвращенія кривой линіи къ оси, АТ продолжаетъ увеличиваться, а абсциссы пойдутъ на задъ и будутъ уменьшаться такъ, что АЕ въ семъ случаѣ можно почесъ за самую большую.

§ 125.

Послику $AL = \frac{ydx}{dy} - x$; то принимая dx за постоянную величину, получимъ $\frac{(dy)^2 dx - yddy}{(dy)^3}$

$-dx = 0$ т. е. $dy^2 dx - yddy dx - dy^2 dx = 0$, и $-yddy = 0$, $ddy = 0$.

§ 126.

Легко примѣнить, что при самой большей аппликаціи нѣкоторыхъ кривыхъ линій какъ то на пр. круговой, тангенсъ бываетъ

параллеленъ оси, слѣдственно и субтангенсъ

безконеченъ, или $\frac{ydx}{dy} = \infty$; но ежели кривая

линея имѣетъ видъ, какъ въ фиг. 12, при самой меньшей аппликашѣ GC, тангенсъ упадетъ на нее и субтангенсъ равенъ бу-

детъ нулю, или $\frac{ydx}{dy} = 0$. Въ первомъ случаѣ

долженъ быть $dy = 0$, во второмъ $dy = \infty$. По сему для сысканія самой большей, или самой меньшей аппликаты не всегда должно полагать дифференціалъ ея равнымъ нулю, но иногда равнымъ безконечности, что и въ другихъ случаяхъ употребить можно см. § 12 калк.

§ 127.

Изъ сего видно, что особливо при кривыхъ линейяхъ имѣющихъ точки противнаго наклоненія, надлежитъ ddy полагать не только равнымъ нулю; но и равнымъ безконечности и чрезъ то опредѣлять, могутъ ли онѣ быть, или нѣтъ.

На пр. Въ Параболѣ, полагая параметръ

равнымъ единицѣ, $y^2 = x$, $y = \sqrt{x}$, $dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \cdot dx$; $ddx = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}dx^2 = 0$, принима

мая dx за постоянное количество; отсюда
 $\frac{1}{4\sqrt{x^3}} = 0$ и $1 = 0$. Такъ же полагая $-\frac{dx^2}{4\sqrt{x^3}} =$

∞ , получимъ $\sqrt{x^3} = 0$. И такъ поелику величина x не опредѣляется ни чрезъ нуль, ни чрезъ безконечность; то парабола очевидно точекъ прошивнаго наклоненія не имѣетъ.

§ 128.

На конецъ замѣнить должно, что хотя и кажется съ начала весьма страннымъ, чтобы можно было отъ дифференціаловъ брать дифференціалы второй степени, а потомъ больше высшихъ степеней; но ежели представить себѣ, что при одинакихъ дифференціалахъ абсциссъ не одинакіе будутъ дифференціалы аппликатъ, ибо кривая линия можетъ при каждомъ мгновеніи перемѣнять свою кривизну; то должно будетъ признаться, что du будетъ перемѣнное количество и слѣдственно ddu возможно. Такъ же и о d^3u , d^4u , d^5u , и пр. разсуждать должно.

§ 129.

Не выходя изъ предѣловъ моего плана, окончалъ бы я мое сочиненіе симъ замѣчаніемъ, что Аглинскіе математики, слѣдуя великому Нютну (по нашему Невтону) по сѣ

сѣ время, вмѣсто dx пишутъ x , вмѣсто ddx , \ddot{x} и ш. д., дифференціальное вычисленіе называющъ *способомъ теченій* (methode of fluxions), а интегральное *способомъ текущихъ*, (methode of fluents). Но дабы окончаніе сдѣланъ приапіѣе, прилагаю оѣшеніе трехъ задачъ: 1) Найти центръ тяжести въ фигурѣ ограниченной, либо одною кривою линеею непрерывною, либо съ посредствомъ прямыхъ. 2) Найти центръ тяжести въ пѣлѣ произходящемъ отъ обращенія какой нибудь фигуры около прямой линее. 3) Найти содержаніе между угломъ паденія совершенно упругаго шѣла на совершенно плоскую поверхность и угломъ отраженія.

а) Поелику изъ механики извѣстно, что ежели къ рычагу привѣшены разныя тяжести и на одномъ его концѣ ничего не находится; то разстояніе центра тяжести отъ сего конца равно суммѣ всѣхъ тяжестей умноженныхъ на свои разстоянія отъ конца, раздѣленной на ихъ сумму. И такъ ежели себѣ представить, что въ фиг. II I. Ч. пространство DAL въ какой нибудь точкѣ на пр. U поддерживается подпавкою такъ, что всѣ безмѣрно малые трапеціи сосиавляющіе площадь DAL находящаяся въ равновѣсіи и ось стоимъ горизонтально, а площадь вертикально; то видно будетъ, что точка

У будетъ центръ тяжести, оныя трапеціи
 будутъ тяжести усиливающіяся въ сторону
 А, или въ сторону L повернуть ось около
 У. Но какъ каждаго трапеція величина, или
 площадь $\equiv ydx$, а умноженная на разстояніе
 x, будетъ $\equiv yxdx$; то сумма всѣхъ $yxdx \equiv$
 $\int yxdx$, а сумма всѣхъ $ydx \equiv \int ydx$. Слѣдова-
 тельно разстояніе У отъ конца А \equiv
 $\frac{\int yxdx}{\int ydx}$. Нѣтъ сумнѣнія, что ежели къ пло-
 щади DAL приласпса равная ей NAL; то
 всей фигуры DAN центръ тяжести будетъ
 находится такъ же въ У; или ежели точка
 У будетъ поддерживаема, то вся фигура
 DAN будетъ въ горизонтальномъ положеніи
 стоять спокойно; ибо найдено, что тра-
 пеціи между У и L падающіе равносильны
 трапеціямъ между А и У находящимся въ
 фигурѣ DAL, слѣдовательно и въ NAL, ибо
 NAL \equiv DAL. И такъ фигура DAN подде-
 рживаясь въ У не можетъ перевѣситься ни на
 право ни на лѣво, а равенство DAL съ NAL
 препятствуетъ ей перевѣситься въ передѣ
 или въ задѣ. Прим. Въ параболѣ $y^2 \equiv px$
 $y \equiv \sqrt{px}$, $ydx \equiv dx \cdot \sqrt{px}$, $\int ydx \equiv \int dx \cdot \sqrt{px}$
 $\equiv \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \sqrt{p}$; такъ же $yxdx \equiv xdx \cdot \sqrt{px}$, $\int yxdx \equiv \int xdx \cdot \sqrt{px}$
 $\equiv \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} \sqrt{p}$. Слѣд. $\frac{\int yxdx}{\int ydx} \equiv \frac{\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} \sqrt{p}}{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \sqrt{p}} \equiv \frac{3}{5}x$ т. е.
 центръ

центр тяжести параболы отстоит от верха А на $\frac{3}{5} AL$.

б) Для нахождения центра тяжести въ тѣлахъ, вмѣсто трапеціевъ должно принять безмѣрно малые усѣченные конусы, изъ коихъ толстога каждого $= \frac{\pi}{2} y^2 dx$, а умноженная

на разстояніе отъ верха $= \frac{\pi}{2} y^2 x dx$. И такъ разстояніе центра тяжести всякаго тѣла $=$

$\frac{\int y^2 x dx}{\int y^2 dx}$. Прим. Въ параболѣ $y^2 x dx = px^2 dx$,

$\int y^2 x dx = \frac{px^3}{3}$, $\int y^2 dx = \frac{px^2}{2}$ слѣд. разстоя-

ніе центра тяжести въ коноидѣ отъ верха $= \frac{2}{3} x$.

с) Ежели совершенно упругое тѣло изъ А брошенное фиг. 14. въ плоскость ВЕ, по отраженіи будетъ въ D; то АВ, DE, и BE будутъ извѣстны. И такъ АВ $= a$, DE $= b$, BE $= c$, BC $= x$, CE $= c - x$. AC $= \sqrt{a^2 + x^2}$, CD $= \sqrt{b^2 + c^2 - 2cx + x^2}$. Сей путь движущагося тѣла равный AC + CD долженъ по мнѣнію нѣкоторыхъ физиковъ быть по тому самый кратчайшій, что съ мудростію напуры сходственно дѣйствовать всегда самыми кратчайшими путями. Но ежели бы кто и усумнился

въ семъ положеніи; то онъ бы увѣрился, что $AC+CD$ должно быть постоянное количество; ибо мы ищемъ закона, по которому шло изъ A по отраженіи должно приходиться въ D . Слѣдъ $d(AC+CD)$ по обоимъ мнѣніямъ равенъ нулю. И такъ видно,

$$\text{Что } \frac{xdx}{V(a^2+x^2)} + \frac{xdx - cdx}{V(b^2+c^2-2cx+x^2)} = 0, \text{ и}$$

$$\text{Что } \frac{x}{V(a^2+x^2)} = \frac{c-x}{V(b^2+c^2-2cx+x^2)}, \text{ то есть}$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{CE}{CD}; \text{ но какъ умноживъ оба количе-}$$

ства на r означающій табличный радіусъ, равенство не измѣнится; то выйдетъ, что $\cos p = \cos q$, а слѣдовательно, зная, что p и q суть углы острые, не лзя не согласиться въ томъ, что $p = q$ т. е. уголъ паденія совершенно упругаго шла на совершенно гладкую поверхность равенъ углу отраженія.

К О Н Е Ц Ъ.

ПОГРѢШНОСТИ.

Знакъ $>$ показываетъ, что какія нибудь слова лишнія, $<$ означаетъ, что какихъ нибудь словъ недостаетъ, — значить, счетъ строкъ съ низу страницы.

Напечатано

читать должно

стр.

строк.

$$5 \quad 6 - \frac{mdx}{n^{\frac{m}{n}} - n} \quad \frac{mdx}{n^{\frac{m}{n}} - m}$$

$$7 \quad 3 - x^n \quad >$$

$$- \quad 1 - + mx^{m-1} z^2 yz^n dx^r y \quad mx^{m-1} y^n z^r dx$$

$$8 \quad 4 - d \cos x \quad dx \cos x$$

$$- \quad 2 - d \cos x \quad dx \cos x$$

$$10 \quad 2 - f \quad a$$

$$17 \quad 1 \quad \text{дифференціала взять} \quad >$$

$$23 \quad 3 - HL \quad hl$$

$$24 \quad 1 \quad ab \quad AB$$

$$28 \quad 2 \quad \frac{bc}{a} \quad \frac{bc}{2a}$$

На.

Напечатано

читать должно

стр. строк.

37	4	$-a + V(a^2 + \frac{ap}{2})$	$-a + V(a^2 + \frac{ap}{2})$
----	---	------------------------------	------------------------------

38	6	$\frac{px}{2} 4$	$\frac{px}{2} +$
----	---	------------------	------------------

43	7	$\frac{ap^3}{2} + c$	$\frac{ap}{2} + c^3$
----	---	----------------------	----------------------

49	I	II	>
50	7	HTF FHT	HTF = THF

—	14	FHT,	FHT.
---	----	------	------

52	13	r по	чпо
----	----	------	-----

53	4	$(\frac{x+p^2}{4})$	$(x + \frac{p}{4})^2$
----	---	---------------------	-----------------------

—	8	$FK^2 -$	$FK^2 =$
---	---	----------	----------

—	7—	m	M
---	----	---	---

54	4—	$V(a^2 + \frac{ap}{2})$	$V(a^2 + \frac{ap}{2})$
----	----	-------------------------	-------------------------

59	7—	$(\frac{a+b}{a})$	$(\frac{a+x}{a})$
----	----	-------------------	-------------------

60	6	и	или
----	---	---	-----

64	5—	CF	OF
----	----	----	----

—	3—	PG	PS
---	----	----	----

—	2—	CG	CS
---	----	----	----

На-

Напечатано

читашь должно

стр. строк.

65 I EH

EH=

67 IO $u^2=t^2$

$u^2=t$

68 3 12

12

69 5- $\frac{m^2}{q}$

$\frac{m^2}{t^2}$

70 I- $\left(\frac{lx-x^2}{1}\right)$

$\left(\frac{2lx-x^2}{1^2}\right)$

70 II PL²

PL².

77 7- at

at=

82 6- $a^{n-4}b^9$

$a^{n-2}b^8$

83 2 $\frac{x^9}{1152a^7}$

$\frac{5x^9}{1152a^7}$

- II $\frac{1}{1152}$

$\frac{5}{1152}$

- - $\frac{a^3}{1152}$

$\frac{5a^3}{1152}$

- 12 $\frac{1}{577}$

$\frac{5}{576}$

86 9 AyM и АНХ

AyX и АНМ

На-

Напечатано
стр. строк.

читатьъ должно

95 5— $-\frac{z^5}{5}$

$\frac{z^5}{5}$

102 4 $(d^2 x^2) x^2 a y^2 = (b+x)^2$
 $\frac{(b^2 - x^2)}{x}$

$(b^2 - x^2)$, а $y^2 = (c+x)^2$
 $\frac{(b^2 - x^2)}{x^2}$

106 6 $\frac{ydx}{dx}$

$\frac{ydx}{dy}$

110 8— часть
физ. табл.

< см равную одной
такой части ра-
дiуса, см = 2 ча-
стямъ, слѣдующую

114 10 e

c

11 p

l

табл. II. фиг. 29 J

P

— < Q

Q, выше B въ
корпусѣ

табл. III. фиг. 38 < p, q, s, t, u,

p = DBA, q = EBD,
s = SBC, t = CBF,
u = FBG

— фиг. 38 < q, p, m

q = GSV, p = GBP,
m = GPB

— фиг. 42 m не на-
мѣстѣ

m = углу CDB

— p
q

q
p

углы отраженiя r, и n+q.

стр. 245 строк. 9 и 11

— p + r

— 2p+r-q

На-

Напечатано

читать должно

табл. V. фиг. 5 < 1

1 долженъ быть на продолженной линиѣ АК въ низу

фиг. 6. В

Р

табл. VI. фиг. 19 М

Н

фиг. 20 < S

между Z — U

фиг. 21 <

G и H

ст. 476—9 стр. С

Z

и во всѣхъ нижнихъ

ст. 480. стр. 16. 18 К

X

ст. 440 стр. 17 двойную

четверную

$$\text{ст. 463} - 4 - \frac{A-B}{2}$$

$$\frac{c-d}{2}$$

$$- 1 - \frac{A-B}{A+B}$$

$$\frac{(A-B)c}{A+B}$$

$$464 \quad 4 \quad A=B$$

$$< \text{ и } c=d$$

$$465 \quad 1 \quad \frac{bAC}{d}$$

$$\frac{dAC}{c}$$

$$475 \quad 6 - PL, \text{ или } l =$$

$$SL, \text{ или } l:$$

$$- 3 - 3lb$$

$$2plb$$

$$- \frac{2plb}{3bp-pl}$$

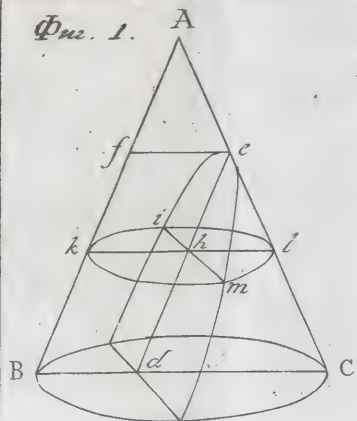
$$\sim \frac{2plb}{3bp+pl}$$

табл. VII.

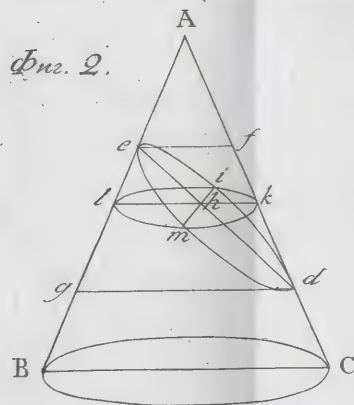
< R при зеркалѣ меньшемъ

На

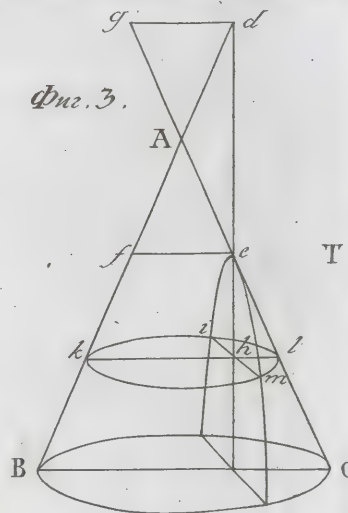
Фиг. 1.



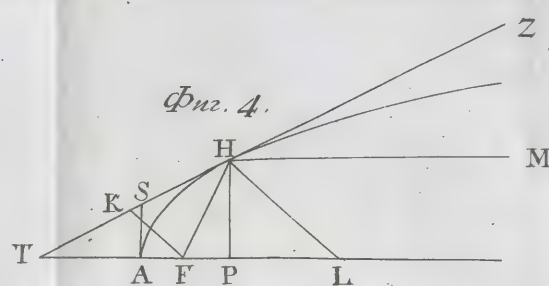
Фиг. 2.



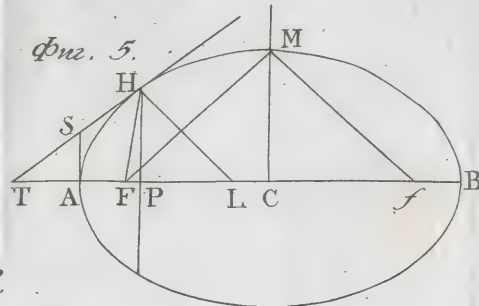
Фиг. 3.



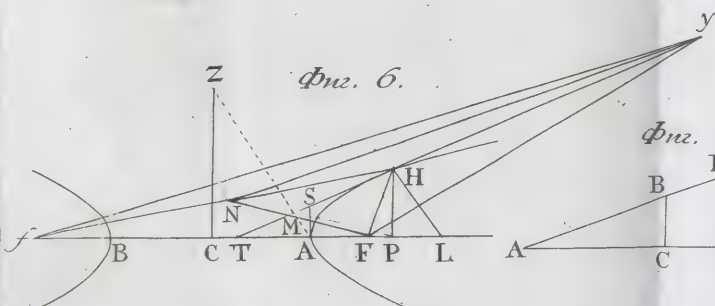
Фиг. 4.



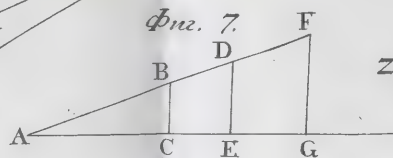
Фиг. 5.



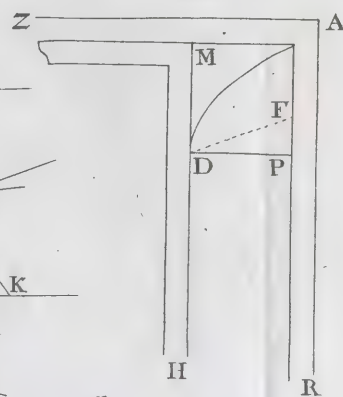
Фиг. 6.



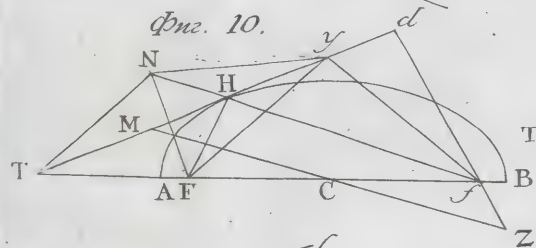
Фиг. 7.



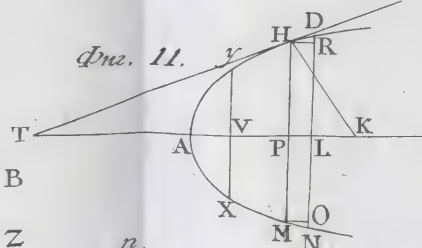
Фиг. 8.



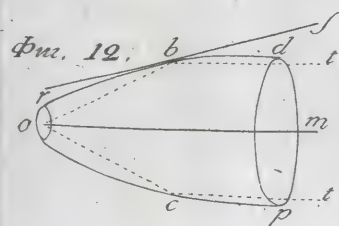
Фиг. 10.



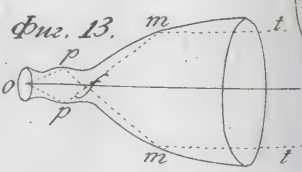
Фиг. 11.



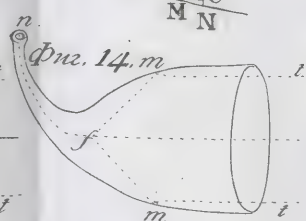
Фиг. 12.



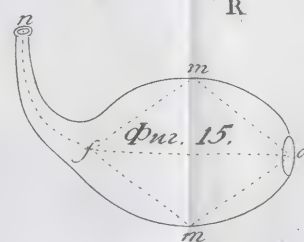
Фиг. 13.



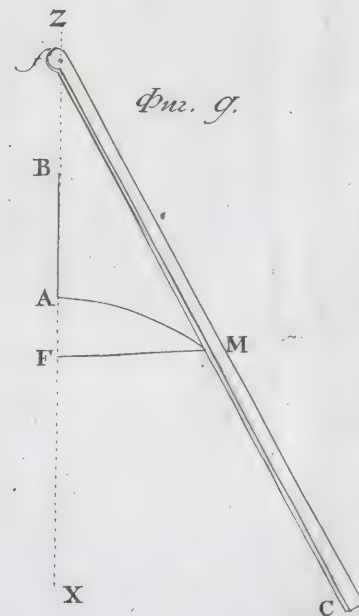
Фиг. 14.



Фиг. 15.



Фиг. 9.



Напечатано

читатъ должно

стр. строк.

спл. 481 стр. 2—

I

t

спл. 482 стр. II или

или=

— — 14 AE CF

AE: CF

— 7 E

>

спл. 484 II—

F

f

спл. 420 13

DE TS

DEIG

таб. VIII. фиг 75

< К на линѣ SR

< V на линѣ SZ

< a на линѣ rM

стр. 422 8 DETS

DEIG

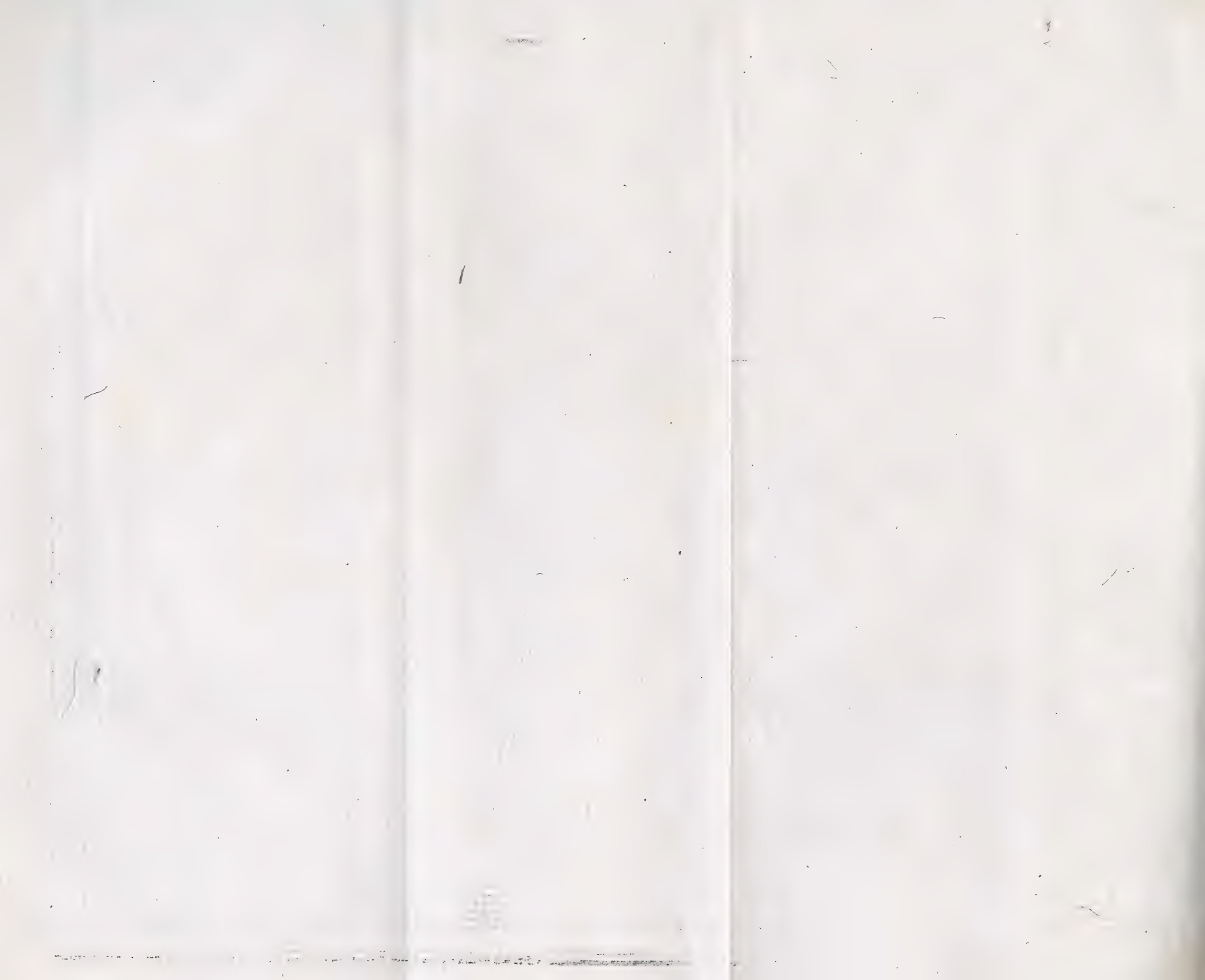
стр. 431 14 gt^2tC

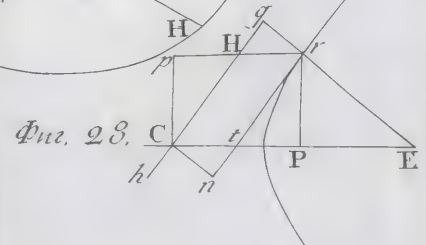
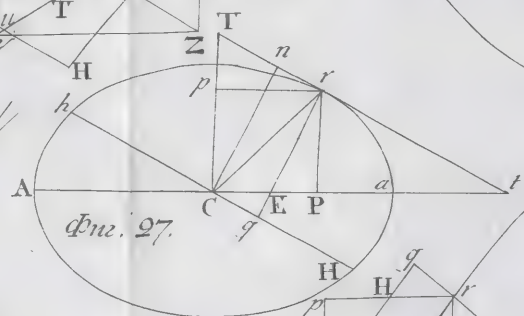
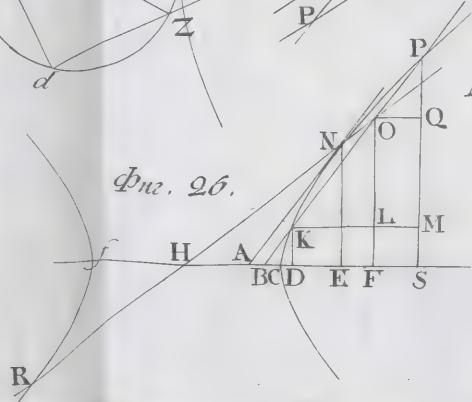
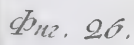
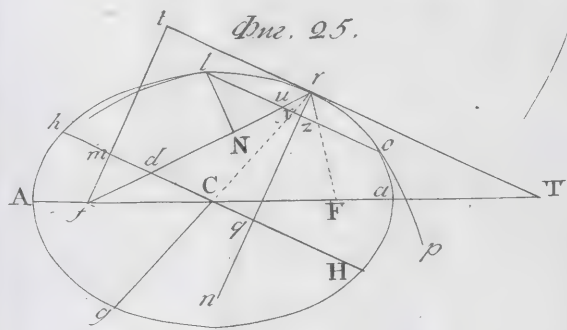
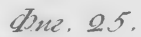
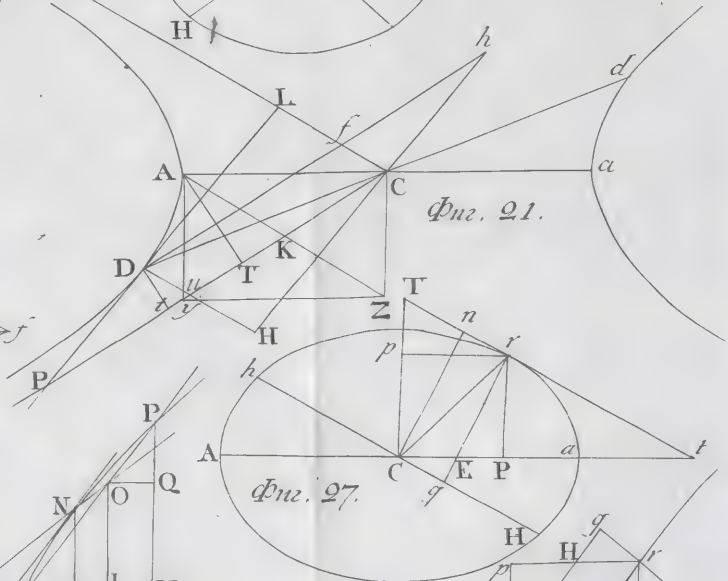
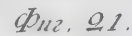
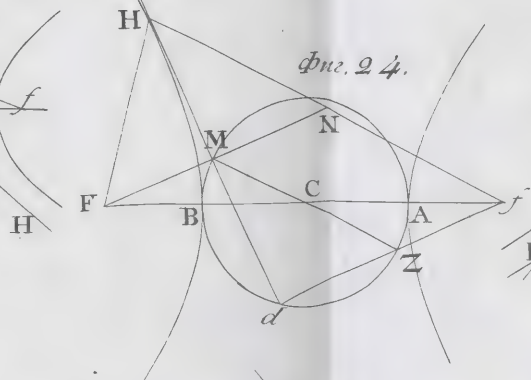
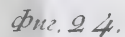
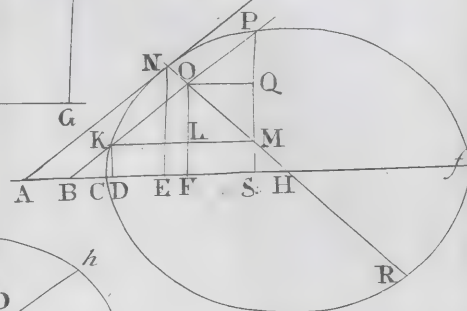
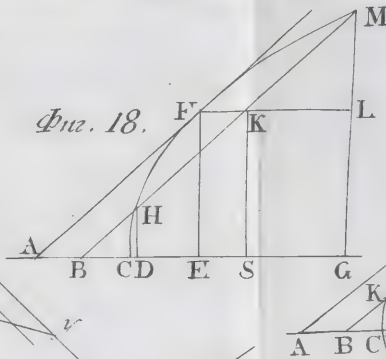
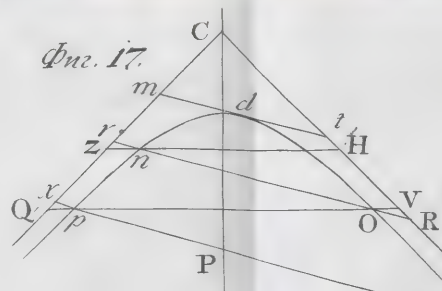
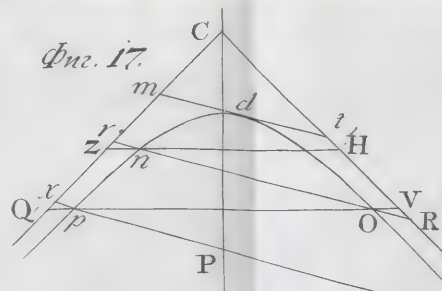
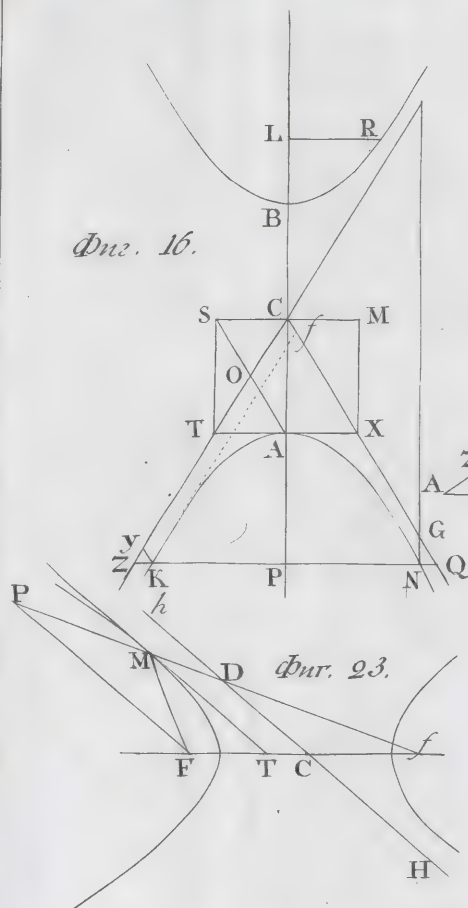
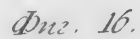
gt^2+c

стр. 443 стр. 5 Vgh

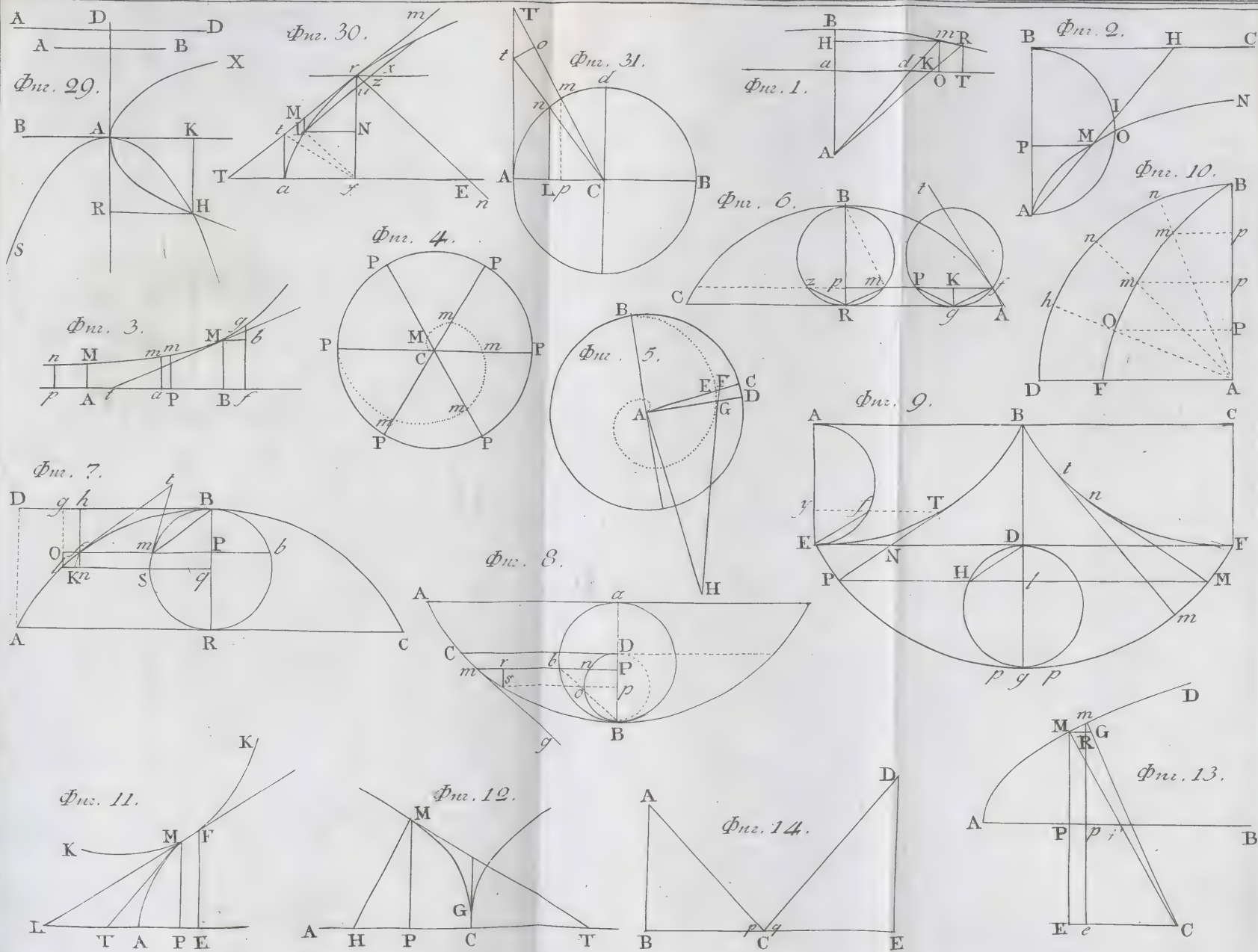
$2Vgh$















Am

ГПБ Русский фонд

18. 65. 5. 37.